Université Aix Marseille 1

Mathématiques générales II - Algèbre linéaire

PEIP - L1

27 avril 2010

Table des matières

Chapitre 0

Introduction et bibliographie

0.1 Algèbre...

Le mot “algèbre” vient du terme arabe "al-jabr" signifiant littéralement "restauration". Ce terme fut pour la première fois employé à propos des mathématiques par le novateur Al-Khwarizmi[1], dans son livre (Livre abrégé sur le calcul par la restauration et la comparaison) où il procède à l'étude systématique des équations du second degré et se ramène à six cas de base, en utilisant ce qu'il nomme “restauration" (al-jabr). Cette restauration se traduit essentiellement par l'ajout d'une même quantité dans les deux membres de l'équation afin d'éliminer les termes apparaissant en soustraction. Cette idée de modifier une égalité pour la rendre plus simple à résoudre est fondamentale. Il faut se rendre compte qu'à l'époque d'Al-Khwarizmi, le seul fait de penser un problème en termes d'égalité avec une grandeur inconnue était déjà une avancée considérable.

0.2 ...linéaire

Voyons maintenant ce qu'est ce qu'un phénomène linéaire. Le prix de détail des marchandises, par exemple : quand le marchand affiche 2 euros le prix d'un kilo de pommes, il est implicite que x kilos de pommes coûteront $2x$ euros. Le prix des pommes est donc donné par la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $x \mapsto 2x$. Le prix que vous payez est une fonction linéaire du poids. De manière plus générale, une application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est une application qui s'écrit sous la forme $x \mapsto \alpha x$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ est donné. Finalement, dans $\mathbb{R}$, l'algèbre linéaire se réduit plus ou moins à la règle de trois...Le concept de linéarité peut alors s'étendre pour désigner un rapport de dépendance très simple entre plusieurs variables : la variable y dépend linéairement des variables $x_1, ..., x_N$ s'il existe des constantes $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ telles que $y = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_N x_N$. On dit encore que y s'exprime comme combinaison linéaire de $x_1, \ldots, x_N$. Par exemple, si vous achetez x_1 kilos de pommes à 2 euros le kilo et x_2 kilos de poires à 3 euros le kilo, le prix total y que vous payez est la combinaison linéaire $y = 2x_1 + 3x_2$. La notion de combinaison linéaire sera fondamentale dans la suite de ce cours.

Finalement, l'*algèbre linéaire* est le domaine des mathématiques qui étudie de façon systématique les propriétés associées à la dépendance linéaire. Les concepts de base sont celui de *combinaison linéaire* dont on vient de parler, et les notions d'*espace vectoriel* et d'*application linéaire*. Les espaces vectoriels les plus simples sont les ensembles $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ lorsqu'ils sont munis de deux opérations très simples : l'addition et la multiplication par un réel, qui présentent un certain nombre de propriétés que nous verrons plus tard.

[1] Al-Khwarizmi né vers 783, originaire de Khiva dans la région du Khwarezm qui lui a donné son nom, mort vers 850 à Bagdad, est un mathématicien, géographe, astrologue et astronome musulman perse dont les écrits, rédigés en langue arabe, ont permis l'introduction de l'algèbre en Europe. Il est à l'origine des mots algorithme (qui n'est autre que son nom latinisé) et algèbre (issu d'une méthode et du titre d'un de ces ouvrages) ou encore de l'utilisation des chiffres arabes dont la diffusion dans le Moyen-Orient et en Europe provient d'un autre de ces livres (qui lui-même traite des mathématiques indiennes) et de l'habitude de désigner l'inconnue par la lettre x dans une équation. Il a d'ailleurs participé à la traduction de nombreux manuscrits scientifiques grecs et indiens. Son apport en mathématiques fut tel qu'il est également surnommé “le père de l'algèbre", avec Diophante dont il reprendra les travaux. En effet, il fut le premier à répertorier de façon systématique des méthodes de résolution d'équations en classant celles-ci.

0.3 Bibliographie

- **Des livres en français.**
  D.-C. Lay *Algèbre linéaire : Théorie, exercices et applications*, 2004, De Boeck.
  R. Dalang- et A Chaabouni *Algèbre linéaire : Aide mémoire, exercices et applications*, 2005, PPUR.
  A. Denmat et F. Héaulme *Algèbre linéaire : Travaux Dirigés*, 1995, Dunod.
  F. Liret, D. Martinais *Algèbre* $1^{ère}$ *année. Cours et exercices avec solutions*, 2003, Dunod.

- **Si vous voulez en savoir plus....**
  J.-M. Monnier *Algèbre MPSI : Cours, méthodes et exercices corrigés*, 2006, Dunod.
- **Des livres en anglais.**
  G. Strang *Introduction to Linear Algebra, fourth edition* , 2009, Wellesley-Cambridge Press U.S. *La lecture de ce livre st fortement conseillé. Le premier chapitre est très largement inspiré de ce livre.*
  J. H Hubbard, B. Burke Hubbard *Vector Calculus, Linear Algebra, and Differential Forms : A Unified Approach*, 2005, Prentice Hall.

- **Quelques sites utiles (cours, exercices corrigés etc...)**
  `http://wims.unice.fr`
  `http://wims.auto.u-psud.fr/wims/wims.cgi?module=U1/algebra/docsyslin.fr`
  `http://web.mit.edu/18.06/www/Video/video-fall-99-new.html`
  `http://home.scarlet.be/~ping1339/Pvect.htm`

0.4 Exercices

Exercice 1 *Des amis vont au bar. Ils consomment* 8 *cafés et* 4 *jus d'orange et payent* 28 *euros. Puis ils recommandent* 7 *cafés et* 5 *jus d'orange. Cette fois ci ils payent* 29 *euros. Quel est le prix du jus d'orange et du café ?*

Exercice 2 *Un cadet de Gascogne dit à ses amis :"J'ai dépensé* 4 *écus de plus que le quart de ce que j'avais en entrant dans la taverne et il me reste* 2 *écus de plus que le quart de ce que j'avais en entrant dans la taverne" Combien avait-il en entrant dans la taverne ?*

Exercice 3 *Un groupe de* 24 *personnes, composé d'élèves mineurs, d'élèves majeurs et de professeurs, vont au cinéma. Le billet coute* 4 *euros pour un élève majeur,* 3 *euros pour un élève mineur et* 9 *euros pour un professeur. Le groupe dépense au total* 102 *euros. Sachant que lors d'une sortie il y a un professeur pour* 5 *élèves, combien y a-t-il d'élèves mineurs, d'élèves majeurs et de professeurs ?*

Chapitre 1

Algèbre linéaire dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Nous allons dans ce chapitre introduire quelques notions nouvelles dans un cadre concret, celui de la droite, du plan et de l'espace, ce qui nous permettra aussi de réviser quelques connaissances que vous avez acquises en secondaire et au premier semestre.

1.1 Vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

1.1.1 Vecteurs et combinaisons linéaires

Dans ce premier chapitre, nous noterons en **gras** un vecteur $\boldsymbol{u}$ de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$ que vous avez peut être noté $\overrightarrow{u}$ dans vos classes précédentes. On s'affranchira de la notation en gras ou avec flèche au fur et à mesure de ce cours, en particulier lorsqu'on introduira les vecteurs comme des “éléments d'un espace vectoriel”, dont nous donnerons une définition précise plus tard.
Soient $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ qui sont définis (pour l'instant) par des paires de réels (u_1, u_2) et (v_1, v_2). On notera aussi les vecteurs sous forme de colonnes contenant les composantes :

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}.$$

L'addition des deux vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ s'écrit :

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{bmatrix}.$$

On peut multiplier un vecteur $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$) par un réel $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\alpha\boldsymbol{u} = \alpha \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha u_1 \\ \alpha u_2 \end{bmatrix}.$$

Définition 1.1 *On appelle* ***combinaison linéaire*** *de $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$ tout vecteur $\boldsymbol{w}$ de la forme $\boldsymbol{w} = \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}$, où α et β sont des réels, c.à.d. :*

$$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha u_1 + \beta v_1 \\ \alpha u_2 + \beta v_2 \end{bmatrix}.$$

Ces propriétés s'appliquent bien sûr aussi aux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Un vecteur $\boldsymbol{u}$ de $\mathbb{R}^3$ est donné par ses trois composantes (u_1, u_2, u_3), et le vecteur s'écrit alors :

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}.$$

La combinaison linéaire de $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ dans $\mathbb{R}^3$ avec les coefficients α et β s'écrit

$$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha u_1 + \beta v_1 \\ \alpha u_2 + \beta v_2 \\ \alpha u_3 + \beta v_3 \end{bmatrix}.$$

Remarque 1.2 (Notations $\begin{bmatrix}\cdots\end{bmatrix}$ et $(\cdots)$) *On a identifié des couples ou des triplets de réels avec des vecteurs écrits sous forme de colonnes. Toutefois, il faudra bien faire attention de ne pas confondre le vecteur (u_1, u_2, u_3), qui est le vecteur colonne dont les composantes sont u_1, u_2 et u_3, avec le vecteur $\begin{bmatrix}u_1 & u_2 & u_3\end{bmatrix}$ qui est un vecteur ligne dont les composantes sont les mêmes que celles du vecteur $\boldsymbol{u}$ mais qui n'est pas du tout le même objet mathématique. Ce vecteur ligne s'appelle "vecteur transposé" du vecteur $\boldsymbol{u}$.*

Dans la définition précédente, on a défini une combinaison linéaire de deux vecteurs. Cette définition contient le cas d'une combinaison linéaire d'un seul vecteur, en prenant le deuxième égal au vecteur nul. Mais on peut aussi bien sûr généraliser la définition de combinaison linéaire pour trois, quatre, ..., n vecteurs. Une question importante qui reviendra souvent pendant ce cours est justement de déterminer l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'un vecteur, de deux vecteurs, de trois vecteurs ? Evidemment, le résultat dépend des vecteurs... Si par exemple on cherche toutes les combinaisons linéaires $\alpha\boldsymbol{u}$ et que le vecteur $\boldsymbol{u}$ est le vecteur nul, on obtient que l'ensemble des combinaisons linéaires est réduit au vecteur nul. Si par contre le vecteur $\boldsymbol{u}$ est non nul, l'ensemble des combinaisons linéaires est la droite de vecteur directeur $\boldsymbol{u}$. Par exemple, l'ensemble des combinaisons linéaires des deux vecteurs

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

est un plan, tandis que l'ensemble des combinaisons linéaires des deux vecteurs :

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}$$

est une droite.

Exemple 1.3 *On cherche à écrire les deux équations que vérifient les inconnues (réelles) α et β pour que la combinaison linéaire $\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}$ soit égale à $\boldsymbol{b}$, avec :*

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix},\ \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix},\ \textit{et } \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}.$$

Pour ce faire, on écrit la combinaison linéaire et l'égalité avec le vecteur $\boldsymbol{b}$: On écrit ensuite l'égalité composante par composante. On obtient ainsi le système suivant, qui est un système linéaire à deux équations et deux inconnues :

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 1 \\ 3\alpha + 2\beta = 5. \end{cases}$$

1.1.2 Produit scalaire, norme

Définition 1.4 *Le **produit scalaire** de deux vecteurs $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ et $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ de $\mathbb{R}^2$ est le réel : $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_1v_1 + u_2v_2$. De même, le produit scalaire de deux vecteurs $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est le réel : $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$.*

On rappelle que le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux est nul.

Définition 1.5 *La **norme euclidienne** d'un vecteur $\boldsymbol{u}$ de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ est le réel positif ou nul $\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}}$.*

On appelle **vecteur unitaire** un vecteur $\boldsymbol{u}$ dont la norme est égale à 1 : $\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}} = 1$. Si $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont deux vecteurs unitaires, alors $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \cos\theta$, où θ est l'angle entre les vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$. On remarque donc que le produit scalaire de deux vecteurs unitaires est toujours compris entre -1 et 1.
Pour deux vecteurs quelconques $\tilde{\boldsymbol{u}}$ et $\tilde{\boldsymbol{v}}$, la formule donnant le cosinus de l'angle θ entre les deux vecteurs devient :

$$\cos\theta = \frac{\tilde{\boldsymbol{u}} \cdot \tilde{\boldsymbol{v}}}{\|\tilde{\boldsymbol{u}}\|\|\tilde{\boldsymbol{v}}\|},$$

ce qui se démontre très facilement en posant $\boldsymbol{u} = \frac{\tilde{\boldsymbol{u}}}{\|\tilde{\boldsymbol{u}}\|}$ et $\boldsymbol{v} = \frac{\tilde{\boldsymbol{v}}}{\|\tilde{\boldsymbol{v}}\|}$: les deux vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont maintenant unitaires et on a donc $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \cos\theta$, d'où le résultat[1].

[1] Ce raisonnement s'appelle un raisonnement par homogénéité.

On rappelle enfin deux inégalités absolument fondamentales : pour tous vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$,

$$\begin{array}{ll} \text{Inégalité de Cauchy-Schwarz :} & |\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}| \le \|\boldsymbol{u}\|\cdot\|\boldsymbol{v}\| \\ \text{Inégalité triangulaire :} & \|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\| \le \|\boldsymbol{u}\|+\|\boldsymbol{v}\| \end{array}$$

1.1.3 Exercices

Tous les exercices de cette section sont tirés de ou inspirés par quelques uns des nombreux exercices du livre de G. Strang dont nous conseillons vivement la lecture…

Exercice 4 *Décrire géométriquement (droite, plan ou $\mathbb{R}^3$ tout entier) l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs suivants :*

$$(a)\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\ \textit{et}\ \begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}\qquad (b)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\ \textit{et}\ \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}\qquad (c)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\ \textit{et}\ \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

Exercice 5 *On considère les 12 vecteurs de $\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{u}_k, k=1,\dots 12,$ de composantes $(\cos\frac{k\pi}{6},\sin\frac{k\pi}{6})$. Dessiner les 12 vecteurs, puis calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{12}\boldsymbol{u}_k$, et enfin calculer $\displaystyle\sum_{\substack{k=1\\k\neq 2}}^{12}\boldsymbol{u}_k$.*

Exercice 6 *Soit un cube dont trois sommets ont comme coordonnées $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$. Donner les coordonnées des autres sommets ainsi que des centres des faces.*

Exercice 7 *Trouver deux vecteurs $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$ qui sont orthogonaux à $\boldsymbol{u}=(1,1,0)$ et orthogonaux entre eux.*

Exercice 8 *Quelle est la norme euclidienne du vecteur $(1,1,\dots,1)$ dans $\mathbb{R}^{25}$?*

Exercice 9 *Soient $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ dont les normes sont $\|\boldsymbol{u}\|=3$ et $\|\boldsymbol{v}\|=4$. Quelles sont les valeurs maximale et minimale de $\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|$ et $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$?*

Exercice 10 *Soient $\boldsymbol{u}=(x,y,z)$ un vecteur du plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x+y+z=0$, et $\boldsymbol{v}=(z,x,y)$.*

1. *Montrer que $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=-\frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|$*
2. *Calculer l'angle entre $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$.*

1.2 La notion de matrice

Nous allons maintenant introduire la notion de matrice, ou plutét son action sur un vecteur. En gros, une matrice est un tableau de nombres. Voyons tout de suite quelle est la définition de son action sur un vecteur, ce qu'on appelle aussi la multiplication matrice vecteur.

1.2.1 Ecriture matricielle d'une combinaison linéaire

Commençons par un exemple dans $\mathbb{R}^2$. On peut écrire l'égalité :

$$3\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\7\end{bmatrix}\ \text{ou encore } 3\boldsymbol{u}+2\boldsymbol{v}=\boldsymbol{b} \text{ avec } \boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}\ \text{et } \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}4\\7\end{bmatrix}$$

On introduit la *matrice* 2×2 qui est un tableau dont la premiére colonne est le vecteur $\boldsymbol{u}$ et la deuxiéme colonne le vecteur colonne $\boldsymbol{v}$:

$$A=\begin{bmatrix}\boldsymbol{u} & \boldsymbol{v}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1\\1 & 2\end{bmatrix}.$$

Gréceàcette matrice, on réécrit la combinaison linéaire $3\boldsymbol{u}+2\boldsymbol{v}$ comme le produit de la matrice A avec le vecteur $(3,2)$:

$$3\boldsymbol{u}+2\boldsymbol{v}=3\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\7\end{bmatrix}.$$

Notons $\boldsymbol{x}$ le vecteur de composantes $(3,2)$. Le produit $A\boldsymbol{x}$ de la matrice A par le vecteur $\boldsymbol{x}$ est la combinaison linéaire $3\boldsymbol{u}+2\boldsymbol{v}$. Plus généralement si $\boldsymbol{x}$ est un vecteur de composantes (x_1,x_2), le produit $A\boldsymbol{x}$ est la combinaison linéaire $x_1\boldsymbol{u}+x_2\boldsymbol{v}$,c.à..d premiére composante du vecteur fois premiére colonne de la matrice plus deuxiéme composante du vecteur fois deuxiéme colonne de la matrice. Plus qu'une définition du produit matrice vecteur (qu'on verra plus en détails au chapitre suivant), ceci est le véritable concept : au départ ce sont les coefficients x_1 x_2 qui multiplient les vecteurs, maintenant c'est la matrice formée par ces vecteurs qui multiplie le vecteur $\boldsymbol{x}$ dont les composantes sont x_1 et x_2.

A retenir :

Le résultat d'un produit matrice vecteur est toujours une combinaison linéaire des colonnes de la matrice.

On peut alors aussi remarquer que le vecteur $A\boldsymbol{x}$ s'écrit

$$A\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{u}+x_2\boldsymbol{v}=x_1\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x_1-x_2\\x_1+2x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(2,-1)\cdot(x_1,x_2)\\(1,2)\cdot(x_1,x_2)\end{bmatrix}$$

La premiére composante de $A\boldsymbol{x}$ est le produit scalaire de la premiére ligne de A avec le vecteur $\boldsymbol{x}$, et la deuxiéme composante de $A\boldsymbol{x}$ est le produit scalaire de la deuxiéme ligne de A avec le vecteur $\boldsymbol{x}$. C'est un autre moyen, extrémement souvent utilisé, de calculer le produit matrice vecteur.

Considérons comme deuxième exemple[2] les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix},\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},$$

Ecrivons la combinaison linéaire $\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{v}+\gamma\boldsymbol{w}$:

$$\alpha\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha\\\beta-\alpha\\\gamma-\beta\end{bmatrix}.$$

On écrit maintenant cette combinaison linéaire sous forme matricielle, c.à.d. à l'aide d'un tableau de nombres, qu'on note A ; le vecteur $\boldsymbol{u}$ est la première colonne du tableau, le vecteur $\boldsymbol{v}$ la seconde, et le vecteur $\boldsymbol{w}$ la troisième :

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha\\\beta-\alpha\\\gamma-\beta\end{bmatrix}.$$

Les scalaires α,β,γ sont les composantes d'un vecteur $\boldsymbol{x}$ de $\mathbb{R}^3$. Le produit de la matrice A par le vecteur $\boldsymbol{x}$ est la combinaison linéaire $\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{v}+\gamma\boldsymbol{w}$ des trois colonnes de A.

$$A\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}&\boldsymbol{v}&\boldsymbol{w}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{bmatrix}=\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{v}+\gamma\boldsymbol{w}.$$

Revenons sur le concept du produit matrice vecteur exposé plus haut pour un vecteur de $\mathbb{R}^2$: au départ ce sont les coefficients α β γ qui multiplient les vecteurs, maintenant c'est la matrice formée par ces vecteurs qui multiplie le vecteur $\boldsymbol{x}$ dont les composantes sont α,β et γ. Du coup on va maintenant renommer les composantes α,β et γ de $\boldsymbol{x}$ en x_1,x_2,x_3. En notant b_1,b_2,b_3 les composantes de $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$, on obtient :

$$A\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2-x_1\\x_3-x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{b}.$$

Comme dans le cas de l'exemple précédent, on peut alors introduire une autre vision (qui est la plus habituelle dans la plupart des ouvrages) du produit matrice vecteur $A\boldsymbol{x}$: les composantes du vecteur $\boldsymbol{b}=A\boldsymbol{x}$ sont obtenues en effectuant le produit scalaire de chaque **ligne** de la matrice avec le vecteur $\boldsymbol{x}$. Sur l'exemple qu'on vient de voir, ceci donne :

$$A\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(1,0,0)\cdot(x_1,x_2,x_3)\\(-1,1,0)\cdot(x_1,x_2,x_3)\\(0,-1,1)\cdot(x_1,x_2,x_3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2-x_1\\x_3-x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{b}.$$

En général, quand on fait des calculs à la main de matrice (on aimerait que ce soit le moins souvent possible. . .) c'est cette façon là qu'on emploie.

[2]Cet exemple est tiré du livre de Gilbert Strang, Introduction to Linear Algebra, Wellesley-Cambridge

1.2.2 Equations linéaires

Jusqu'à présent, on a supposé que le vecteur $\boldsymbol{x}$, dont les composantes sont les coefficients de la combinaison linéaire, était connu, et on cherchait à calculer la combinaison linéaire $\boldsymbol{b}$ résultante. Supposons maintenant au contraire qu'on cherche les coefficients de la combinaison linéaire des trois vecteurs $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$ de manière à ce qu'elle soit égale au vecteur $\boldsymbol{b}$, qui lui est maintenant supposé connu. On cherche donc x_1, x_2 et x_3 tels que $x_1\boldsymbol{u} + x_2\boldsymbol{v} + x_3\boldsymbol{w} = \boldsymbol{b}$. Ceci revient à résoudre un système linéaire en x_1, x_2 et x_3. *La question "Trouver les coefficients x_1, x_2 x_3 tels que la combinaison linéaire $x_1\boldsymbol{u} + x_2\boldsymbol{v} + x_3\boldsymbol{w}$ soit égale à $\boldsymbol{b}$" est équivalente à la question "résoudre le système $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$".* Avec la matrice A définie par

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{le système } A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ s'écrit } \begin{cases} x_1 & = b_1 \\ -x_1 + x_2 & = b_2 \\ -x_2 + x_3 & = b_3 \end{cases} \text{ et a comme solution } \begin{cases} x_1 = b_1 \\ x_2 = b_1 + b_2 \\ x_3 = b_1 + b_2 + b_3. \end{cases} \tag{1.2.1}$$

Notons que ce système est particulièrement simple parce qu'on a directement x_1 à partir de la première équation, on peut ensuite substituer x_1 dans la deuxième équation et trouver x_2, et enfin substituer x_1 et x_2 dans la troisième équation et trouver x_3. Ceci est possible parce qu'on travaille avec une matrice "triangulaire inférieure", c'est à dire une matrice dont tous les coefficients au dessus de la diagonale sont nuls. Evidemment, tous les systèmes ne sont pas aussi simples à résoudre.

Remarquons que si $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ (le vecteur de composantes $(0, 0, 0)$ la solution $\boldsymbol{x}$ du système est $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Ceci est une propriété remarquable, qui est vraie pour la matrice A de ce système, mais qui ne l'est pas pour toutes les matrices... Remarquons également que pour n'importe quel $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$, le calcul ci dessus va nous fournir un unique $\boldsymbol{x} = (b_1, b_1 + b_2, b_1 + b_2 + b_3)$. Cette propriété est dée au fait que la matrice A est **inversible**, au sens où, à partir de n'importe quel $\boldsymbol{b}$, on peut récupérer un et un seul $\boldsymbol{x}$ (on verra plus loin la définition précise de matrice inversible).

$$\text{Si } A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \text{ pour } \boldsymbol{x} = \begin{cases} x_1 = b_1 \\ x_2 = b_1 + b_2 \\ x_3 = b_1 + b_2 + b_3 \end{cases} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = S\boldsymbol{b} \tag{1.2.2}$$

Donc la solution du système $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ est donnée par $\boldsymbol{x} = S\boldsymbol{b}$. On dit que S est la matrice inverse de A, notée A^{-1}. On obtient $\boldsymbol{b}$ à partir de $\boldsymbol{x}$ en multipliant $\boldsymbol{x}$ par A. On retrouve $\boldsymbol{x}$ en multipliant $\boldsymbol{b}$ par A^{-1}. La matrice A^{-1} défait ce que la matrice A a fait. On peut aussi écrire $A^{-1}A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$.

Considèrons maintenant les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \tilde{\boldsymbol{w}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Les deux premiers vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont les mêmes que précédemment, mais le vecteur $\tilde{\boldsymbol{w}}$ a un -1 en première composante au lieu d'un zéro. La matrice C formée par ces trois vecteurs s'appelle la matrice des différences cycliques. Elle s'écrit :

$$C = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} & \tilde{\boldsymbol{w}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

et les combinaisons linéaires des vecteurs $x_1\boldsymbol{u} + x_2\boldsymbol{v} + x_3\boldsymbol{w}$ s'écrivent de manière matricielle :

$$C\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_3 \\ x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}$$

Ce système est moins facile à résoudre que le précédent, et d'ailleurs il est impossible de trouver la solution du système, vu que le système admet une infinité de solutions, ou au contraire pas de solution du tout. Par exemple,

$$\text{le système } C\boldsymbol{x} = 0 \text{ admet comme solution } \overline{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

mais aussi tous les vecteurs de la forme $\alpha\bar{\boldsymbol{x}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Mais par contre,

$$\text{le système } C\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \text{ n'admet aucune solution,}$$

car la somme des trois composantes de $C\boldsymbol{x}$ vaut zéro alors que la somme des trois composantes du second membre vaut 1. Géométriquement, ceci revient à dire qu'il n'existe pas de combinaison linéaire des trois vecteurs $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ et $\tilde{\boldsymbol{w}}$ qui donne le vecteur $\boldsymbol{b} = (1,0,0)$. Donc l'ensemble des combinaisons linéaires des trois vecteurs $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ et $\tilde{\boldsymbol{w}}$ ne remplit pas tout l'espace $\mathbb{R}^3$. Pour que le système $C\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ait une solution, il faut que la somme des trois composantes du second membre soit nulle, puisque la somme des trois composantes de $C\boldsymbol{x}$ est toujours nulle. En d'autres termes, toutes les combinaisons linéaires $x_1\boldsymbol{u}+x_2\boldsymbol{v}+x_3\tilde{\boldsymbol{w}}$ sont dans le plan d'équation $b_1+b_2+b_3 = 0$. On voit ici la différence cruciale entre les combinaisons linéaires de $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$, qui remplissaient tout l'espace, et celles de $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ et $\tilde{\boldsymbol{w}}$, qui ne remplissent qu'un plan.

1.2.3 Dépendance et indépendance

On choisit les deux premiers vecteurs colonnes $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ de la matrice. L'ensemble des combinaisons linéaires de ces deux vecteurs est un plan $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^3$.
On a vu dans les paragraphes précédents deux cas possibles : pour la matrice A, le troisième vecteur colonne $\boldsymbol{w}$ de la matrice A n'est pas dans le même plan $\mathcal{P}$: les combinaisons linéaires de $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$ remplissent l'espace tout entier. Pour la matrice C, le troisième vecteur colonne $\tilde{\boldsymbol{w}}$ de la matrice C est dans le même plan $\mathcal{P}$: les combinaisons linéaires de $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ et $\tilde{\boldsymbol{w}}$ remplissent un plan, et non plus tout l'espace. On peut écrire $\tilde{\boldsymbol{w}}$ comme combinaison linéaire de $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$.

Le vecteur $\boldsymbol{w}$ n'est pas dans le plan de $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$; les vecteurs sont "indépendants" ou "libres".
La seule combinaison qui donne $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ est $0\boldsymbol{u} + 0\boldsymbol{v} + 0\boldsymbol{w}$.

Le vecteur $\tilde{\boldsymbol{w}}$ est dans le plan de $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$; les vecteurs sont "dépendants" ou "liés".
Il y a des combinaisons à coefficients non nuls qui donnent $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ (car $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$).

Les notions de dépendance et d'indépendance sont fondamentales, et nous reviendrons plus en détails dessus par la suite. On peut déjà remarquer sur cet exemple les liens entre la notion d'indépendance des vecteurs colonnes de la matrice et la résolution des systèmes :

Colonnes indépendantes .	$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ a une solution unique $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.	La matrice A est inversible.
Colonnes dépendantes .	$C\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ a plusieurs solutions.	La matrice C n'est pas inversible.

1.2.4 Exercices

Exercice 11 (On commence tout doucement.)
1. Soit

$$A = \begin{bmatrix}1 & 2\\-1 & 1\end{bmatrix} \textit{ et } \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}.$$

Construire géométriquement le vecteur $A\boldsymbol{x}$, et calculer ses composantes.

2. Même question avec

$$A = \begin{bmatrix}1 & -1\\2 & 1\end{bmatrix} \textit{ et } \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}.$$

3. Effectuer maintenant les produits $A\boldsymbol{x}$àl'aide des produits scalaires des lignes de la matrice par le vecteur $\boldsymbol{x}$.

Exercice 12 (On continue doucement.)

1. *Soient $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Soit A la matrice dont la première colonne est $\boldsymbol{u}$ et la seconde $\boldsymbol{v}$.*
   (a) *Ecrire A pour $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ et $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$. Cette matrice s'appelle la matrice identité et se note $\mathrm{I}d_2$ (l'indice 2 signifiant qu'il s'agit d'une matrice carrée d'ordre 2). Calculer $\mathrm{I}d_2\boldsymbol{x}$ pour $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$.*

(b) *On suppose maintenant $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ quelconques. Soit $\boldsymbol{x} = (2, -1)$. Le produit $A\boldsymbol{x}$ est une combinaison des colonnes de A. Exprimer cette combinaison linéaire.*

Donner les composantes du vecteur résultant pour $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ et $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

2. *Soient $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. La multiplication d'une matrice $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{w} \end{bmatrix}$ par le vecteur colonne $\boldsymbol{x} = (2, -1, 3)$ donne une combinaison des colonnes de A. Exprimer cette combinaison linéaire.*

   Donner les composantes du vecteur Ax pour $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.
3. *Exprimer la matrice identité Id_3, c.à.d. la matrice telle que $\mathrm{Id}_3\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$.*

Exercice 13 (Un petit modèle de prédation) *Sur une éle déserte vivent une bande de loups, une bande de chèvres et une bande de serpents. Chaque nuit, chaque loup égorge une chèvre, puis chaque chévre restante piétine (à mort) un serpent et enfin, chaque serpent restant mord un loup (et la blessure est mortelle) . On suppose qu'il n'y a pas d'autres pertes de vie (par vieillesse par exemple), ni gains (par naissances...). On note ℓ^*, s^* et c^* le nombre respectif de loups, serpents et chèvres le 11 janvier 2010 au soir, et ℓ, s et c le nombre respectif de loups, serpents et chèvres le 12 janvier 2010 au matin. Exprimer ℓ, s et c en fonction de ℓ^*, s^* et c^* par une relation matricielle.*
N.B. Pour une suite à ce petit modèle, voir l'exercice 59.

Exercice 14 (Produit matrice vecteur pour une matrice $n \times p$) *Si A est une matrice de n lignes et p colonnes, on la multiplie par un vecteur $\boldsymbol{x}$ pour obtenir un vecteur $\boldsymbol{b}$ qui est combinaison linéaire des colonnes de A. Quel est le nombre de composantes de $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{b}$?*

Exercice 15 (Matrice et linéarité) *Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ une matrice 2×2. Soit $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$.*

1. *Calculer $A\boldsymbol{u}$ et $A\boldsymbol{v}$.*
2. *Soient α et β des réels. Calculer $A(\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{v})$ et $\alpha A\boldsymbol{u}+\beta A\boldsymbol{v}$. Comparer. C'est cette propriété qu'on appelle linéarité : on verra plus loin que l'application $\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ est une* application linéaire.

Exercice 16 (Matrice d'élimination) *Soit $\ell \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et soit E la matrice 2×2 définie par*

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\ell & 1 \end{bmatrix}$$

1. *Calculer $\boldsymbol{b} = E\boldsymbol{x}$. Décrire (en français...) l'opération effectuée sur les lignes de $\boldsymbol{x}$ lorsque la matrice E multiplie le vecteur $\boldsymbol{x}$.*
2. *Soit $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \ell & 1 \end{bmatrix}$. Calculer $\boldsymbol{c} = F\boldsymbol{b}$. Décrire (en français...) l'opération effectuée sur les lignes de $\boldsymbol{b}$ lorsque la matrice F multiplie le vecteur $\boldsymbol{b}$.*

Exercice 17 (Une propriété surprenante, à première vue) *Soient (a, b) et $(c, d) \in \mathbb{R}^2$.*

1. *On suppose que (a, c) et (b, d) sont colinéaires. Montrer qu'alors (a, b) et (c, d) sont colinéaires.*
2. *Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$; montrer que les vecteurs colonnes de A sont liés si et seulement si les vecteurs lignes de A le sont.*

1.3 Méthode du pivot de Gauss

1.3.1 Ecriture vectorielle et matricielle des systèmes linéaires

Considérons le système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases} \tag{1.3.3}$$

Regardons ce qui se passe ligne par ligne. Chaque ligne donne l'équation d'une droite, qu'on représente dans la figure 1.1. Pour que le couple (x, y) vérifie les deux équations, il faut donc que le point de coordonnées x

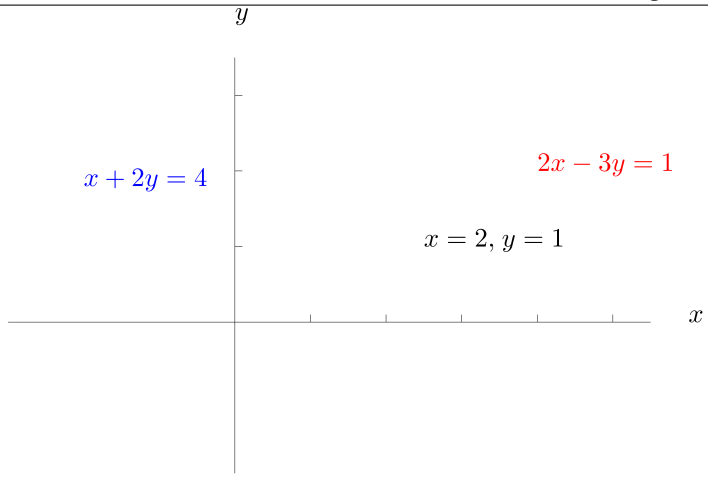


FIG. 1.1 – *Vision par lignes* : la solution du système est l'intersection des droites

et y soit l'intersection des deux droites. C'est ce qu'on appelle la vision "par lignes" du système : la solution du système (1.3.3) est l'intersection de deux droites. Voyons maintenant un peu ce qui se passe si on regarde les choses "par colonnes". On va maintenant lire le système (1.3.3) comme une équation vectorielle faisant intervernir les vecteurs :

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \ \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \text{ et } \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Avec ces vecteurs, on peut réécrire le système (1.3.3) comme une seule équation vectorielle

$$x\boldsymbol{u} + y\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b}.$$

On cherche la "bonne" combinaison linéaire de $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ (c.à.d. les bons coefficients x et y) qui va donner $\boldsymbol{b}$, comme

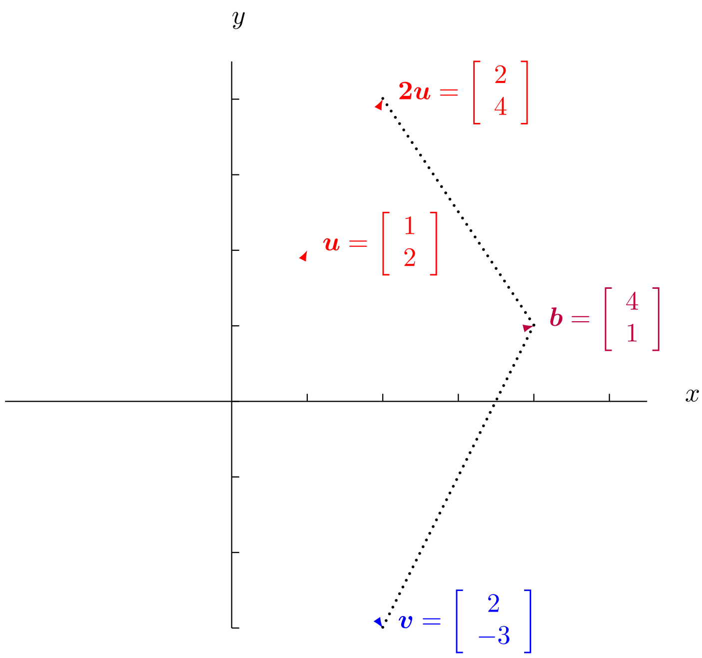


FIG. 1.2 – *Vision par colonnes* : la solution du système est l'intersection des droites

on le voit sur la figure 1.2 ; ceci s'écrit aussi avec les vecteurs colonnes :

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}.$$

Avec le choix $x = 2$ et $y = 1$, on retrouve bien $\boldsymbol{b}$: on va donc multiplier le vecteur $\boldsymbol{u}$ par $x = 2$ et le vecteur $\boldsymbol{v}$ par $y = 1$ puis additionner les vecteurs $2\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ pour trouver $\boldsymbol{b}$.

$$2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}$$

On réécrit maintenant l'équation vectorielle sous forme matricielle. La matrice A est un tableau de 2×2 nombres, dont la première colonne est le vecteur $\boldsymbol{u}$ et la deuxième colonne le vecteur $\boldsymbol{v}$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Dans la vision par colonnes, le produit de la matrice A par le vecteur $\boldsymbol{x} = (x, y)$ est égale à la combinaison linéaire $x\boldsymbol{u} + y\boldsymbol{v}$:

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Dans la vision par lignes, le produit de la matrice A par le vecteur $\boldsymbol{x} = (x, y)$ est un vecteur $\boldsymbol{b}$ dont la première composante est le produit scalaire de la première ligne de la matrice avec le vecteur $\boldsymbol{x}$ et la deuxième composante le produit scalaire de la deuxième ligne de la matrice avec le vecteur $\boldsymbol{x}$. Lorsqu'on regarde les lignes de A, on a la vision "par lignes", et lorsqu'on regarde les colonnes, on a la vision "par colonnes". Le système d'équations sous forme matricielle s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

On effectue la multiplication matrice vecteur soit en effectuant le produit scalaire des lignes avec le vecteur de composantes (x, y) soit par combinaison linéaire des colonnes de A. On a vu que la solution de ce système est $x = 2$ et $y = 1$.

Dans le chapitre suivant, on va résoudre des systèmes de n équations à n inconnues, et la matrice du système sera donc un tableau de $n \times n$ nombres. Mais donnons maintenant un exemple dans $\mathbb{R}^3$. On considère le système linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{llll} x & +y & +z & = 3 \\ x & +2y & +3z & = 9 \\ x & -2y & +4z & = 12 \end{array} \right. \tag{1.3.4}$$

qui s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Donnons les visions "par lignes" et "par colonnes" pour cet exemple.

Vision ligne Chaque ligne du système est l'équation d'un plan dans $\mathbb{R}^3$. Le système (1.3.4) possède une unique solution si les plans se coupent en un point. Le produit $A\boldsymbol{x}$ s'effectue par lignes en prenant les produits scalaires :

$$A\boldsymbol{x} = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\textbf{ligne1}) \cdot \boldsymbol{x} \\ (\textbf{ligne 2}) \cdot \boldsymbol{x} \\ (\textbf{ligne 3}) \cdot \boldsymbol{x} \end{bmatrix}$$

Vision colonne Résoudre le système revient à trouver les bons coefficients x, y et z d'une combinaison linéaire $x\boldsymbol{u} + y\boldsymbol{v} + z\boldsymbol{w}$ des vecteurs $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$ pour que $x\boldsymbol{u} + y\boldsymbol{v} + z\boldsymbol{w} = \boldsymbol{b}$, avec :

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ et } \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Le système (1.3.4) possède une solution si les plans se coupent en un point. Le produit $A\boldsymbol{x}$ s'effectue par colonnes en calculant la combinaison linéaire :

$$A\boldsymbol{x} = x\,(\textbf{colonne 1}) + y\,(\textbf{colonne2}) + z\,(\textbf{colonne 3}).$$

Avec la matrice A ci-dessus, on remarque que $\boldsymbol{b} = 3(\textbf{colonne 3})$. On en déduit que la solution du système est $(x, y, z) = (0, 0, 3)$ (mais les choses ne sont évidemment pas toujours aussi simples !).

1.3.2 Elimination

Un exemple 2×2

Vous avez vu en secondaire comment résoudre un système par élimination et substitution. On va étudier cette année une procédure systématique d'élimination, celle qui est utilisée dans les programmes informatiques pour la résolution des systèmes linéaires, et qui est connue sous le nom de méthode de Gauss [3]. Sur le système précédent,

$$\left\{\begin{array}{l} x + 2y = 4 \\ 2x - 3y = 1 \end{array}\right. \quad \text{devient} \quad \left\{\begin{array}{l} x + 2y = 4 \\ -7y = -7 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l}\text{(multiplier la première équation par 2)} \\ \text{(puis soustraire à la deuxième)}\end{array} \tag{1.3.5}$$

La deuxième équation donne alors $y = 1$, puis en substituant cette valeur dans la première $x = 2$. L'étape d'élimination produit un système dont la matrice est triangulaire supérieure (les coefficients sous la diagonale sont nuls). Une fois que la matrice du système est sous forme triangulaire supérieure, il est très facile de le résoudre par substitution.
La solution du système d'origine et du système après élimination est la même, comme on peut le voir sur la vision "en ligne" des figures 1.1 et 1.3.

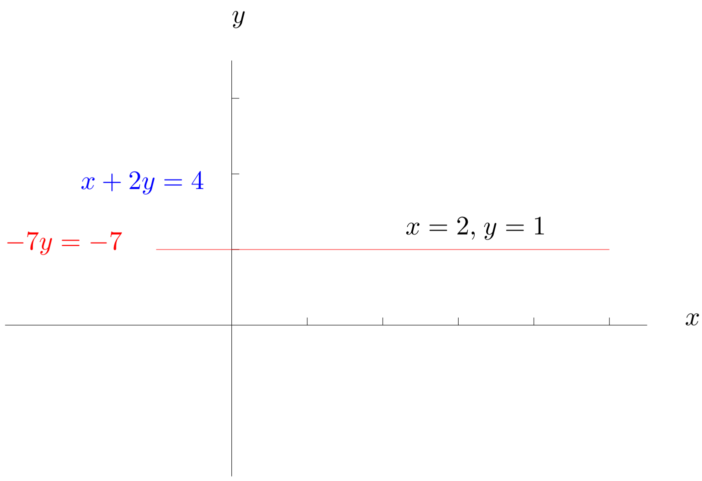


FIG. 1.3 – le système après élimination dans la deuxième équation : *Vision par lignes* : la solution du système est l'intersection des droites, elle n'a pas changé.

Même si ce système est très simple à résoudre et que vous auriez très certainement réussi à le faire sans ce cours d'algèbre linéaire, cela vaut le coup d'analyser les opérations qu'on a effectuées pour comprendre la méthode et l'appliquer dans des cas plus compliqués.
Pour éliminer x dans la deuxième équation, on a multiplié la première équation par 2 et on l'a soustraite à la deuxième. On a utilisé pour cela le fait que le premier coefficient de la première ligne est 1, et en particulier non nul : on dit que c'est le **pivot**. Comme le coefficient devant x dans la deuxième équation est 2, le multiplicateur pour l'élimination est donc aussi 2.
Prenons le même système, mais où on a multiplié la première ligne par 5 : l'élimination va se faire maintenant de la manière suivante :

$$\left\{\begin{array}{lcll} 5x & + & 10y & = 20 \\ 2x & - & 3y & = 1 \end{array}\right. \quad \text{devient} \quad \left\{\begin{array}{lcll} 5x & + & 10y & = 20 \\ & - & 7y & = -7 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l}\text{(multiplier la première équation par } \frac{2}{5} \\ \text{(puis soustraire à la deuxième)}\end{array} \tag{1.3.6}$$

[3]Johann Carl Friedrich Gauss (30 avril 1777 – 23 février 1855) est un mathématicien, astronome et physicien allemand. Il est considéré comme l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps.

La solution reste évidemment la même, mais maintenant, le premier coef de la première ligne est 5. Comme le coefficient devant x dans la deuxième équation reste égal 2, le multiplicateur est maintenant $\frac{2}{5}$.
La deuxième équation a elle aussi un pivot, qui est égal à -7, et qui permet d'obtenir la solution (on l'utiliserait pour éliminer y dans la troisème équation s'il y en avait une). Pour résoudre un système de deux équations à deux inconnues, on a utilisé 2 pivots. Pour résoudre un système de n équations à n inconnues, on aura besoin de n pivots. Notez qu'à la fin de l'élimination, le système obtenu a une forme triangulaire, et que les pivots sont sur la diagonale du "triangle".
Voyons maintenant si les choses peuvent se passer plus mal (et oui... elles le peuvent !)

Echecs possibles de l'élimination de Gauss

Si on programme l'algorithme de Gauss comme expliqué au paragraphe précédent et qu'on l'applique à n'importe quelle matrice, il est possible que le résultat soit "`NaN`" ce qui veut dire en décodé "Not a Number" : l'ordinateur vous répond que vous essayez de diviser par zéro et qu'il ne sait pas faire... petite explication sur trois exemples faciles, déduits du précédent.

Exemple 1.6 (Echec total de l'élimination : pas de solution) *Avec le système suivant :*

$$\left\{\begin{array}{rcrl} x & - & 2y & = 4 \\ 2x & - & 4y & = 1 \end{array}\right. \text{ devient } \left\{\begin{array}{rcrl} x & - & 2y & = 4 \\ & & \boldsymbol{0}y & = -7 \end{array}\right. \begin{array}{l} \text{(multiplier la première équation par 2)} \\ \text{(puis soustraire à la deuxième)} \end{array} \tag{1.3.7}$$

*l'élimination ne marche pas parce qu'arpès élimination de x, la deuxième équation a un zéro devant le y, et on ne peut pas diviser par 0 (comme votre ordinateur vous le fera savoir si vous essayez. . .) ; on dit aussi qu'on a "un zéro en position pivotale", mais il est absolument interdit de dire "un pivot nul", parce qu'**un pivot n'est jamais nul**.*
Cet échec peut être interprété géométriquement (vision "lignes") par le fait que les deux équations du sytème sont les équations de deux droites parallèles et non confondues, et donc ont une intersection vide.
On peut aussi l'interpréter vectoriellement (vision "colonnes") par le fait qu'on ne peut pas atteindre le vecteur $(4,1)$ par une combinaison linéaire des vecteurs $(1,2)$ et $(-2,-4)$

Exemple 1.7 (Echec de l'élimination, mais infinité de solution) *Dans l'exemple précédent, on remplace le second membre $(4,1)$ par $(4,8)$:*

$$\left\{\begin{array}{rcrl} x & + & 2y & = 4 \\ 2x & + & 4y & = 8 \end{array}\right. \text{ devient } \left\{\begin{array}{rcrl} x & + & 2y & = 4 \\ & & \boldsymbol{0}y & = 0 \end{array}\right. \begin{array}{l} \text{(multiplier la première équation par 2)} \\ \text{(puis soustraire à la deuxième)} \end{array} \tag{1.3.8}$$

Là encore on a un zéro en position pivotale, et votre ordinateur risque de ne pas aimer si vous n'avez pas mis de test dans votre programme. . . . Mais contrairement à l'exemple précédent, on a maintenant une solution au système, et même une infinité de solutions : en effet, tout $y \in \mathbb{R}$ satisfait la deuxième équation et une fois qu'on a choisi un y, on obtient x par la première. Dans la vision "lignes", les droites qui étaient parallèles dans l'exemple précédent sont maintenant confondues. Dans la vision colonne, le second membre $\boldsymbol{b} = (4,8)$ est maintenant sur la même droite que les vecteurs colonnes $(1,2)$ et $(2,4)$ de la matrice du système.

Exemple 1.8 (Echec temporaire de l'élimination : deux pivots obtenus par échange de ligne)
Supposons qu'on ait un zéro en position pivotale de la première ligne :

$$\left\{\begin{array}{rcrl} 0x & + & 2y & = 4 \\ 2x & - & 3y & = 1 \end{array}\right. \text{(devient, après échange) (des deux lignes)} \left\{\begin{array}{rcrl} 2x & - & 3y & = 1 \\ 0x & + & 2y & = 4 \end{array}\right. \tag{1.3.9}$$

Le nouveau système est sous forme triangulaire, et il est donc prêt pour l'étape de substitution, dite aussi étape de remontée. La deuxième équation donne $y = 2$ puis la première $x = \frac{7}{2}$. Les pivots du système sont 2 et 2, mais pour les obtenir on a dé échanger les lignes.

Les deux premiers exemples sont des systèmes non inversibles (ou singuliers) : dans les deux cas on n'a pas de pivot pour la seonde équation (zéro en position pivotale). Les systèmes singuliers ont soit aucune solution, soit une infinité de solutions. Le deuxième exemple fait apparaitre un système inversible (ou régulier). On obtient les deux pivots souhaités (parce qu'on a deux équations et deux inconnues) et on a une solution unique.

Théorie générale pour les systèmes 2×2

Lemme 1.9 *Soient $a, b, c, d, \alpha, \beta$ des réels. On suppose $a \neq 0$. Alors le système*

$$\begin{cases} ax + & by & = \alpha \\ cx + & dy & = \beta \end{cases}$$

est équivalent au système

$$\begin{cases} ax + & by & = \alpha \\ & (d - \frac{bc}{a})y & = \beta - \frac{c}{a}\alpha \end{cases}$$

Démonstration : Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Si (x, y) est solution du premier système, alors dans ce premier système, on multiplie la première équation par $-c/a$ (on a le droit car $a \neq 0$) et on l'additionne à la seconde équation. On vérifie ainsi que (x, y) est solution du second système. Réciproquement, si (x, y) est solution du second système, alors dans ce second système, on multiplie la première équation par c/a et on l' additionne à la seconde équation. On vérifie ainsi que (x, y) est solution du premier système. On conclut que les deux systèmes ont même ensemble de solution. Ils sont donc équivalents. ■

Théorème 1.10 *Soient a, b, c, d des réels et $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Le système $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ admet une solution unique pour tout $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$ si et seulement si la matrice A admet deux pivots lors de l'élimination de Gauss.*

Démonstration : Dire que la matrice A admet deux pivots lors de l'élimination de Gauss signifie que, quitte à échanger les deux lignes de A,

- le premier coefficient de la première ligne de A est non nul, et que
- après avoir fait apparaître un 0 en première position de la seconde ligne de A, le coefficient en deuxième position est non nul.

Par le Lemme 1.9, on peut résumer cela en

- soit $a \neq 0$ et $d - bc/a \neq 0$,
- soit $a = 0$, et dans ce cas on intervertit les deux lignes et on a $c \neq 0$ et $b - da/c \neq 0$.

Dans chacun de ces deux cas, l'étape de remontée montre par son procédé consructif qu'il existe une unique solution au système. On a ainsi montré que l'existence de deux pivots entraéne l'existence et unicité de la solution du système.

Montrons maintenant que si on n'a pas deux pivots alors on n'a pas existence et unicité. Si on n'a pas deux pivots en sortie de l'élimination, on n'est donc dans aucun des cas ci-dessus, et alors on est dans l'une des situations suivantes :

- $a = 0 = c$: on est ramené au système
$$\begin{cases} by & = \alpha \\ dy & = \beta \end{cases}$$
qui a 0 ou une infinité de solution,
- $a \neq 0$ et $d - bc/a = 0$: on est ramené au système
$$\begin{cases} ax + & by & = \alpha \\ & 0y & = \beta - \frac{c}{a}\alpha \end{cases}$$
qui a 0 ou une infinité de solution,
- $c \neq 0$ et $b - da/c = 0$: on est ramené au système
$$\begin{cases} cx + & dy & = \beta \\ & 0y & = \alpha - \frac{a}{c}\beta \end{cases}$$
qui a 0 ou une infinité de solution.

■

Définition 1.11 *Soient a, b, c, d des réels. On appelle **déterminant** de la matrice $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ et on note $\det(A)$ le réel défini par $\det(A) = ad - bc$.*

Proposition 1.12 *Si la matrice* $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *a deux pivots, le déterminant de la matrice A est égal au produit des pivots. Si le nombre de pivots est strictement inférieur à 2,* $\det(A) = 0$.
Le système $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *admet donc une solution unique pour tout* $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$ *si et seulement si* $\det(A) \neq 0$.

Démonstration : Voir exercice 26. ■

1.3.3 Un système 3×3

On va maintenant effectuer l'élimination de Gauss sur le système 3×3 suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 = 2 \\ 4x_1 & + & 9x_2 & - & 3x_3 = 8 \\ -2x_1 & - & 3x_2 & + & 7x_3 = 10 \end{array}\right. \tag{1.3.10}$$

Le premier pivot est le premier coefficient non nul de la première ligne, c.à.d. 2. On utilise ce pivot pour annuler les coefficients de x_1 dans les lignes 2 et 3. On soustrait 2 fois la ligne 1 à la ligne 2, et on soustrait (-1) fois la ligne 1 à la ligne 3 :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} \mathbf{2}x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 = 2 \\ 4x_1 & + & 9x_2 & - & 3x_3 = 8 \\ -2x_1 & - & 3x_2 & + & 7x_3 = 10 \end{array}\right. \underset{\substack{\ell_2 \rightsquigarrow \ell_2 - 2\ell_1 \\ \ell_3 \rightsquigarrow \ell_3 - (-1)\ell_1}}{\longrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcl} \mathbf{2}x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 = 2 \\ & & y & + & x_3 = 4 \\ & & x_2 & + & 5x_3 = 12 \end{array}\right.$$

Dans les formules ci dessus la phrase $\ell_2 \rightsquigarrow \ell_2 - 2\ell_1$ estàcomprendre par "la ligne 2 est remplacée par la la ligne 2 - deux fois la ligne 1". On cherche maintenant le pivot de la deuxième équation, il se trouve que c'est le coefficient de x_2, égal à 1. On utilise ce pivot pour annuler le coefficient de x_2 dans la ligne 3 :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} \mathbf{2}x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 = 2 \\ & & \mathbf{1}x_2 & + & x_3 = 4 \\ & & x_2 & + & 5x_3 = 12 \end{array}\right. \underset{\ell_3 \rightsquigarrow \ell_3 - \ell_2}{\longrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcl} \mathbf{2}x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 = 2 \\ & & \mathbf{1}x_2 & + & x_3 = 4 \\ & & & & 4x_3 = 8 \end{array}\right.$$

La troisième ligne comporte un pivot égal à 4 devant x_3 et donc le système est transformé par l'élimination de Gauss en un système triangulaire supérieur :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 = 2 \\ 4x_1 & + & 9x_2 & - & 3x_3 = 8 \\ -2x_1 & - & 3x_2 & + & 7x_3 = 10 \end{array}\right. \begin{array}{l}\text{devient, après} \\ \text{élimination de Gauss}\end{array} \left\{\begin{array}{rcrcl} \mathbf{2}x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 = 2 \\ & & \mathbf{1}x_2 & + & 1x_3 = 4 \\ & & & & \mathbf{4}x_3 = 8. \end{array}\right. \tag{1.3.11}$$

où les pivots sont écrits en gras. Ceci peut encore s'écrire

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Longleftrightarrow U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c},$$

$$\text{avec } A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},\ \text{ et } \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

On effectue ensuite une remontée pour trouver la solutions $\boldsymbol{x}$ du système :
La troisième équation $4x_3 = 8$ donne $x_3 = 2$
La deuxième équation $x_2 + x_3 = 4$ donne $x_2 = 2$
La première équation $2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 2$ donne $x_1 = -1$.
Dans la vision en lignes, ceci veut dire que l'intersection des trois plans dont les équations sont celles du système (1.3.11). est le point $(-1, 2, 2)$. Dans la vision en colonnes, ceci veut dire qu'une combisaison linéaire de vecteurs colonnes donne le second membre $\boldsymbol{b}$:

$$A\boldsymbol{x} = (-1)\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ -3 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}$$

ce qui s'écrit sous forme matricielle :

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}$$

Dans le cas d'un système 4×4 ou $n \times n$, la méthode d'élimination de Gauss fonctionne selon les mêmes principes ; on part d'une matrice, et de colonne en colonne, on transforme A en une matrice triangulaire U, si l'élimnation marche jusqu'au bout, selon le schéma suivant :
Etape 1 Utiliser la première équation pour créer des zéros sous le premier pivot dans la colonne 1.
Etape 2 Utiliser la nouvelle équation 2 pour créer des zéros sous le deuxième pivot dans la colonne 2.
Etape 3 à n. Continuer à chercher les n pivots et la matrice triangulaire U pour les colonnes 3 à n.

$$\text{Après l'étape 2, on a une matrice de la forme } \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}$$

$$\text{et on cherche une matrice de la forme } \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

1.3.4 Exercices

Algèbre linéaire et géométrie

Exercice 18 (Intersection de droites dans $\mathbb{R}^2$) *Déterminer parmi les couples de droites suivantes, lesquelles sont sécantes, parallèles ou confondues. Si elles sont sécantes, déterminer les coordonnées du point d'intersection, si elles sont parallèles ou confondues donner un vecteur directeur et un vecteur normal. Ecrire pour chaque couple de droites la vision "par colonnes", c.à.d. en écrivant les systèmes linéaires à résoudre sous forme de combinaisons linéaires, puis sous forme matricielle.*

1. $\mathcal{D}_1 \ : 3x + 5y - 2 = 0$ *et* $\mathcal{D}_2 \ : x - 2y + 3 = 0$
2. $\mathcal{D}_1 \ : 2x - 4y + 1 = 0$ *et* $\mathcal{D}_2 \ : -5x + 10y + 3 = 0$
3. $\mathcal{D}_1 \ : \left\{ \begin{array}{l} x = 3 + 4t \\ y = 2 - t \end{array} \right. \ t \in \mathbb{R}$ *et* $\mathcal{D}_2 \ : \left\{ \begin{array}{l} x = 5 - s \\ y = 2 + 3s \end{array} \right. \ , s \in \mathbb{R}$
4. $\mathcal{D}_1 \ : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \end{array} \right. \ , t \in \mathbb{R}$ *et* $\mathcal{D}_2 \ : \left\{ \begin{array}{l} x = 3 - 4s \\ y = -1 + 6s \end{array} \right. \ , s \in \mathbb{R}$
5. $\mathcal{D}_1 \ : x - 2y + 3 = 0$ *et* $\mathcal{D}_2 \ : \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + t \\ y = 3 - 2t \end{array} \right. \ , t \in \mathbb{R}$
6. $\mathcal{D}_1 \ : 3x - 2y + 1 = 0$ *et* $\mathcal{D}_2 \ : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - 4t \\ y = 2 - 6t \end{array} \right. \ , t \in \mathbb{R}$

Exercice 19 (Equations de droites dans $\mathbb{R}^2$) *On considère les droites* $\mathcal{D} : x + 2y = 5$ *et* $\mathcal{D}' : 3x - y = 1$ *et on note* A *le point d'intersection des deux droites et* B *le point de coordonnées* $(5, 2)$.

1. *Donner une équation cartésienne de la droite* (AB).
2. *Donner une équation cartésienne de la droite perpendiculaire à* $\mathcal{D}$ *et passant par* B.
3. *Donner une équation cartésienne de la droite parallèle à* $\mathcal{D}'$ *et passant par* B.
4. *Soit* C *le point de coordonnées* $(2, -7)$. *Donner une équation cartésienne de la médiatrice* (Δ) *du segment* $[B, C]$. *La droite* (Δ) *est elle parallèle à* $\mathcal{D}$ *? et à* $\mathcal{D}'$ *?*

Exercice 20 (Plans et droites de $\mathbb{R}^3$) *On considère le plan* $\mathcal{P}$ *d'équation* $x - y - z - 2 = 0$ *et le plan* $\mathcal{P}'$ *d'équation* $x - 2y - 3z + 1 = 0$.

1. *Donner les composantes de deux vecteurs non colinéaires de chacun des plans vectoriels associés aux plans* $\mathcal{P}$ *et* $\mathcal{P}'$.
2. *Donner les composantes d'un vecteur normal à chacun de ces plans. En déduire que ces deux plans sont sécants. On note* $\mathcal{D}_1$ *l'intersection de ces deux plans.*
3. *Donner un vecteur directeur de cette droite* $\mathcal{D}_1$ *et vérifier que le point* $A = (5, 3, 0)$ *appartient à cette droite. En déduire une équation paramétrique de cette droite.*
4. *Ecrire l'équation du plan orthogonal à la droite* $\mathcal{D}_1$ *et passant par le point* $B = (1, 1, 1)$.

Elimination par Gauss

Exercice 21 (Pivots)

1. *Si A est la matrice* $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$*, quels sont ses pivots ?*
2. *Même question pour* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$.
3. *Même question pour* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

Exercice 22 (Un système particulier) *Soient a, α et β des réels. On considère le système suivant :*

$$\begin{cases} ax + y = \alpha \\ x + ay = \beta \end{cases}$$

Donner les valeurs de a, α et β pour lesquelles le système admet :

1. *une solution unique,*
2. *une infinité de solutions,*
3. *pas de solution.*

Exercice 23 (Un petit peu de réflexion) *Montrer qu' un système linéaire 2×2 (ou 3×3) ne peut pas avoir exactement deux solutions.*

Exercice 24 *Soit* $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 2 \\ a & a & 3 \\ a & a & a \end{bmatrix}$. *Pour quelles valeurs de a l'élimination de Gauss va-t-elle échouer ?*

Exercice 25 (Matrices A et U dans l'algorithme d Gauss) *On suppose que l'élimination de Gauss sur $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ a produit le système triangulaire supérieur (équivalent) $U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ sans permutation de ligne.*

1. *De quelles lignes de A la ligne i de U est-elle une combinaison linéaire ?*
2. *Si $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, a-t-on $U\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$?*
3. *Si $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, a-t-on $U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$?*
4. *Si A est triangulaire inférieure, comment est la matrice U ?*

Pour aller plus loin

Exercice 26 (système linéaire et déterminant) *Soient a, b, c, d α et β des réels. On considère le système suivant :*

$$\begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases}$$

1. *Ecrire le système sous forme matricielle $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.*
2. *Montrer que si $a = 0$ et $c = 0$, il existe des seconds membres $\boldsymbol{b}$ pour lesquels le système n'admet pas de solution.*
3. *Montrer que la matrice admet deux pivots si et seulement si $ad - bc \neq 0$. On appelle déterminant de la matrice A le nombre $ad - bc$.*
4. *En déduire que le système admet une solution unique pour tout second membre si et seulement si le déterminant de la matrice est non nul.*

Chapitre 2

Systèmes linéaires et matrices

2.1 Matrices et opérations sur les matrices

Jusqu'é présent, on n'a introduit que des matrices réelles,c.à..d avec des coefficients dans $\mathbb{R}$. Mais on peut très bien aussi vouloir travailler avec des matrices complexes ; dans tout ce qui suit, $\mathbb{K}$ est un corps qui est soit l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ soit l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.

2.1.1 Définitions

Définition 2.1 *Pour tous entiers strictement positifs n et p, on appelle* **matrice de taille $n \times p$ à coefficients dans** $\mathbb{K}$ *un tableau à n lignes et p colonnes :*

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{bmatrix}.$$

Les $a_{i,j}$ s'appellent les **coefficients de la matrice**. *Le premier indice est celui de la ligne et le second celui de la colonne.*

On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes. Lorsque $n = p$, on note simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ et on parle alors de matrice **carrée**. Pour $n \neq p$, les matrices seront dites “rectangulaires". Si $n > p$, la forme de la matrice sera celle d'un rectangle “debout" (plus haut que large), alors que si $n < p$, ce sera un rectangle “couché" (plus large que haut).

Quelques matrices particulières :

• la **matrice nulle** $O_{n,p} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, qui peut étre rectangulaire ou carrée si $n = p$.

• Les matrices suivantes sont toutes des matrices <u>carrées</u>, *i.e.* des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

– la **matrice identité** $\mathrm{Id}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

– les **matrices diagonales** $A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix}$,

– les **matrices triangulaires supérieures** $U = \begin{bmatrix} \star & \star & \cdots & \star \\ 0 & \star & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & \star \end{bmatrix}$, et **inférieures** $L = \begin{bmatrix} \star & 0 & \cdots & 0 \\ \star & \star & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \star & \cdots & \star & \star \end{bmatrix}$.

Des matrices “très rectangulaires" :

• les éléments de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ sont appelés **matrices lignes** ou **vecteurs lignes**,
• les éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont appelés **matrices colonnes** ou **vecteurs colonnes**.
On peut extraire des matrices lignes ou colonnes de matrices à plusieurs lignes et colonnes :

Définition 2.2
– *On appelle* $i^{ème}$ *ligne de la matrice* $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *la matrice ligne* $\begin{bmatrix} a_{i,1} & \cdots & a_{i,p} \end{bmatrix}$ *notée* $\ell_i(A)$. *C'est un élement de* $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$.
– *On appelle* $j^{ème}$ *colonne de la matrice* $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *la matrice colonne* $\begin{bmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{bmatrix}$ *notée* $c_j(A)$. *C'est un élement de* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

2.1.2 Opérations sur les matrices

Définition 2.3 – **La somme de deux matrices** $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *de même taille* $n \times p$ *est la matrice* $C = A + B = B + A = (c_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *avec* $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$.
– **Le produit d'une matrice** $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ **par un scalaire** $\lambda \in \mathbb{K}$ *est la matrice* $B = \lambda A = A\lambda = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *avec* $b_{i,j} = \lambda a_{i,j}$.

Remarque 2.4 (Attention aux tailles des matrices pour la somme !) *On ne peut pas définir la somme de deux matrices de tailles différentes.*

Au premier chapitre, on a défini le produit d'une matrice A par un vecteur $\boldsymbol{x}$ comme la combinaison linéaire des colonnes de A avec comme coefficients les composantes de $\boldsymbol{x}$. Par exemple, soit A une matrice 3×3 de coefficients $a_{i,j}, i = 1, \ldots, 3$, $j = 1, \ldots, 3$; l'indice i représente la ligne, et l'indice j représente la colonne. On note $c_1(A), c_2(A), c_3(A)$ les colonnes de la matrice A. Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$, et (x_1, x_2, x_3) les composantes de $\boldsymbol{x}$, alors $A\boldsymbol{x} = x_1 c_1(A) + x_2 c_2(A) + x_3 c_3(A)$. On peut à partir de là définir facilement le produit de deux matrices. Soit la matrice $B = (b_{i,j})_{\substack{i=1,\ldots,3 \\ j=1,\ldots,3}} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont

$$c_1(B) = \begin{bmatrix} b_{1,1} \\ b_{2,1} \\ b_{3,1} \end{bmatrix},\ c_2(B) = \begin{bmatrix} b_{1,2} \\ b_{2,2} \\ b_{3,2} \end{bmatrix},\ \text{et } c_3(B) = \begin{bmatrix} b_{1,3} \\ b_{2,3} \\ b_{3,3} \end{bmatrix}.$$

On peut alors considérer chaque colonne $c_j(B)$, $j = 1, 2, 3$, comme un vecteur et effectuer le produit matrice vecteur $Ac_j(B)$:

$$Ac_j(B) = b_{1,j} c_1(A) + b_{2,j} c_2(A) + b_{3,j} c_3(A).$$

Chaque produit donne un vecteur colonne, qu'il est naturel de définir comme la j-éme colonne de la matrice AB. **Chaque colonne de la matrice AB est donc une combinaison linéaire des colonnes de la matrice A.** Calculons le coefficient (i, j) c.é.d de la i-éme ligne et j-éme colonne de la matrice AB, qu'on va noter $(AB)_{i,j}$. Il s'agit donc de la i-éme composante du vecteur colonne $Ac_j(B) = b_{1,j} c_1(A) + b_{2,j} c_2(A) + b_{3,j} c_3(A)$ On a donc $(AB)_{i,j} = b_{1,j} a_{i,1} + b_{2,j} a_{i,2} + b_{3,j} a_{i,3}$. Ceci peut encore s'écrire :

$$(AB)_{i,j} = a_{i,1} b_{1,j} + a_{i,2} b_{2,j} + a_{i,3} b_{3,j} = \sum_{k=1}^{3} a_{i,k} b_{2,k}$$

De maniére plus générale, on définit donc le produit de deux matrices quelconques de la maniére suivante :

Définition 2.5 *Le* **produit de deux matrices** $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ *est la matrice* $C = (c_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ *avec*

$$c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + \cdots + a_{i,p}b_{p,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}$$

Remarque 2.6 (Attention aux tailles des matrices pour le produit !)

– *Si* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* $B \in \mathcal{M}_{q,\ell}(\mathbb{K})$ *on ne peut effectuer le produit* AB *que si* $p = q$ *et le produit* BA *que si* $\ell = n$.
– *En général, même si* $p = n = \ell = q$, $\boldsymbol{AB \neq BA}$.

De la méme façon qu'on a remarqué que les colonnes de la matrice AB sont des combinaisons linéaires des colonnes de la matrice A, on peut aussi remarquer maintenant que **les lignes de la matrice** AB **sont des combinaisons linéaires des lignes de la matrice** B**.** C'est cette propriété qu'on utilise dans les procédures d'élimination du style de la méthode de Gauss, qu'on verra prochainement. Par exemple, pour le produit des deux matrices 3×3 A et B vues précédemment, on a $(AB)_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + a_{i,3}b_{3,j}$, et donc, en notant $\ell_i(AB)$ et $\ell_i(B)$ les lignes respectives de AB et B, on a :

$$\ell_i(AB) = a_{i,1}\ell_1(B) + a_{i,2}\ell_2(B) + a_{i,3}\ell_3(B),$$

ce qui montre bien que la ligne i de AB est une combinaison linéaire des lignes de B.

En résumé, la multiplication de A **é droite** par une matrice par une matrice opére sur les **colonnes** de la matrice A, tandis qu'une multiplication de A **é gauche** par une matrice opére sur les **lignes** de A.

Remarque 2.7 (Quelques produits particuliers)

• *Si* $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ *est un vecteur colonne, le produit* AX *est un vecteur colonne* $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *avec*

$$y_i = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}x_k, \ i = 1, \ldots, n.$$

• *Si* $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* $X = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ *est un vecteur ligne, le produit* XA *est un vecteur ligne* $Y = \begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_p \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ *avec*

$$y_j = \sum_{k=1}^{n} x_k a_{k,j}, \ j = 1, \ldots, p.$$

• *Si* $X = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ *est un vecteur ligne et* $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *est un vecteur colonne alors le produit* $XY \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{K})$ *est un nombre donné par*

$$x_1y_1 + \cdots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i.$$

On reconnaît le produit scalaire des 2 *vecteurs* $(x_1, \ldots, x_n)$ *et* $(y_1, \ldots, y_n)$.

- *Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on note $E_j \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, $F_i \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ les matrices*

$$E_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow j^{\grave{e}me} \textit{ ligne}, \quad F_i = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ \qquad\qquad\quad \uparrow \\ \qquad\qquad\qquad i^{\grave{e}me} \textit{ colonne} \end{array}.$$

Alors on a $AE_j = c_j(A)$, c'est-à-dire la $j^{\grave{e}me}$ colonne de la matrice A et $F_iA = \ell_i(A)$, c'est-à-dire la $i^{\grave{e}me}$ ligne de la matrice A.

Proposition 2.8 (Propriétés de l'addition et de la multiplication) *On se donne $A, B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $D, E \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $F \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.*

1. $A + (B + C) = (A + B) + C$,
2. $A + B = B + A$,
3. $A + 0 = A$, $A - A = 0$,
4. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$,
5. $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$,
6. $\mathrm{Id}_n A = A$, $A\mathrm{Id}_p = A$,
7. $\lambda(AD) = (\lambda A)D = A(\lambda D)$,
8. $(A + B)E = AE + BE$ *et* $A(D + E) = AD + AE$,
9. $A(EF) = (AE)F$.

Définition 2.9 (Puissance d'une matrice carrée) *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $k \in \mathbb{N}$. On définit les puissances de la matrice A de la façon suivante :*

$$A^0 = \mathrm{Id}_n,\ A^k = AA^{k-1} \textit{pour tout entier } k \geq 1.$$

2.1.3 Matrice inverse et matrice transposée

Définition 2.10 *On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que*

$$AB = BA = \mathrm{Id}_n.$$

Si B existe, elle est unique et on note $B = A^{-1}$ et A^{-1} est appelé l'inverse de A. On notera $GL_n(\mathbb{K})$[1] l'ensemble des matrices inversibles de taille $n \times n$.

Démonstration : Il y a un point à montrer : l'unicité de l'inverse. Soient $B_1, B_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB_1 = B_2A = \mathrm{Id}_n$. On multiplie à droite l'égalité $B_2A = \mathrm{Id}_n$ par B_1. Il vient $(B_2A)B_1 = \mathrm{Id}_nB_1 = B_1$. Par associativité de la multiplication dans le membre de gauche, on a $B_2(AB_1) = B_1$ et donc $B_2 = B_1$. D'où l'unicité (on a en fait montré un peu mieux : s'il existe un inverse à gauche et un inverse à droite, alors ces deux matrices sont égales). ■

Remarque 2.11 (Inverse à gauche et à droite) *En fait on peut montrer que si A est une matrice carrée et s'il existe une matrice "inverse à gauche" A^{-1} telle que $A^{-1}A = \mathrm{Id}$, alors A^{-1} est aussi une "inverse à droite",c.à..d $AA^{-1} = \mathrm{Id}$. La démonstration de ce résultat nécessite des outils qu'on ne verra qu'un peu plus tard. Il est cependant bien pratique car il permet, lorsqu'on veut calculer l'inverse d'une matrice, de ne calculer que l'inverse à gauche (par l'algorithme de Gauss-Jordan qu'on verra prochainement) sans vérifier que c'est aussi un inverse à droite.*

[1]La notation GL veut dire "groupe linéaire", et provient du fait que l'ensemble des matrices inversibles muni de la multiplication des matrices est un groupe[2] **non commutatif** dont l'élément neutre est Id_n ; voir l'exercice 52àce sujet.

Attention. On ne parle de matrices inversibles que pour des matrices carrées ! ! !

Proposition 2.12 *Soient $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$. Alors la matrice AB est inversible et*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Démonstration : Par associativité de la multiplication matricielle, on a : $B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}\mathrm{Id}B = \mathrm{Id} = ABB^{-1}A^{-1}$. ■

Définition 2.13 (Matrice transposée) *On appelle* **transposée d'une matrice** *$A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ que l'on note $A^t = (\alpha_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}$ dont les coefficients sont définis par $\alpha_{i,j} = a_{j,i}$.*

Proposition 2.14
1. *Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors $(A+B)^t \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $(A+B)^t = A^t + B^t$.*
2. *Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Alors $(AB)^t \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{K})$ et $(AB)^t = B^tA^t$.*
3. *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, alors $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$.*

Démonstration : Le premier point est immédiat. Pour le deuxième point, on a

$$[(AB)^t]_{i,j} = (AB)_{j,i} = \sum_{k=1}^{p} a_{j,k}b_{k,i} = \sum_{k=1}^{p}(A^t)_{k,j}(B^t)_{i,k} = (B^tA^t)_{i,j}.$$

Enfin, si A est inversible alors $AA^{-1} = \mathrm{Id}$. Donc $(AA^{-1})^t = (\mathrm{Id})^t = \mathrm{Id}$. Par le point précédent, $(AA^{-1})^t = (A^{-1})^tA^t$. Donc A^t est inversible et $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$. ■

Définition 2.15 (Matrices symétrique et antisymétrique) *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$, on dit que A est **symétrique** si $A^t = A$ et **antisymétrique** si $A^t = -A$.*

Définition 2.16 (Matrice de permutation) *Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que P est une matrice de permutation si P a exactement un coefficient égal à 1 dans chaque ligne et chaque colonne, et que tous ses autres coefficients sont nuls. Une matrice de permutation a donc les mêmes lignes que la matrice identité mais dans un ordre qui peut être différent.*

Quelques proprétés des matrices de permutation :

1. le produit de matrices de permutation est une matrice de permutation
2. toute matrice de permutation P est inversible et $P^{-1} = P^t$

2.1.4 Exercices

Opérations sur les matrices

Exercice 27 (Peut-on le faire ? si oui, on le fait !)
Soient A une matrice 3×7, B une matrice 7×3, C une matrice 7×1, et D une matrice 3×1, dont tous les coefficients sont égauxà1 (On les appelle matrices d'Attila…, voir aussi exercice 46). Parmi les opérations suivantes, dire lesquelles sont autorisées, et dans ce cas, calculer la matrice résultante.

$$AB \quad BA \quad ABD \quad DBA \quad A(B+C)$$

Exercice 28 (Produits de matrices particuliéres)
Calculer PA et EA avec

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ et } E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

.

Quelles sont les actions de P et E sur les lignes de A lorsqu'on effectue ces produits ?

Calculer maintenant AP et AE. Quelles sont les actions de P et E sur les colonnes de A lorsqu'on effectue ces produits ?

Exercice 29 (Matrice d'élimination) *Soit A une matrice carrée d'ordre 3. Ecrire la matrice $T_{2,1}(-3)$ qui, lorsqu'on effectue le produit $T_{2,1}(-3)A$, soustrait 3 fois la ligne 1 de la ligne 2 ? Ecrire ensuite la matrice $P_{3,2}$ qui permute les lignes 2 et 3.*

Effectuer ensuite les produits $AT_{2,1}(-3)$ et $AP_{3,2}$ et décrire la matrice résultante.

On considére le système $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ avec

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ecrire le système $T_{2,1}(-3)A\boldsymbol{x} = T_{2,1}(-3)\boldsymbol{b}$ puis le système $P_{3,2}T_{2,1}(-3)A\boldsymbol{x} = P_{3,2}T_{2,1}(-3)\boldsymbol{b}$. Calculer le produit $C = P_{3,2}T_{2,1}(-3)$ puis écrire le système $CA\boldsymbol{x} = C\boldsymbol{b}$.

Exercice 30 (Une autre façon de calculer le produit de matrices)
Un exemple *Soient $C_1, C_2 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ des matrices colonnes et L_1 et $L_2 \in \mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{R})$ des matrices lignes définies par*

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},\ C_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix},\ L_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix},\ L_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Calculer C_1L_1, C_2L_2, $C_1L_1 + C_2L_2$.
Soit $A = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}$ et $B = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}$. Calculer AB.
Comparer.

Le cas général. *Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. Montrer que $AB = \sum_{k=1}^{p} c_k(A)\ell_k(B)$, oé $c_k(A) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est la k-iéme colonne de A et $\ell_k(B) \in \mathcal{M}_{1,q}(\mathbb{R})$ la k-iéme ligne de B.*

Exercice 31 (Matrices qui commutent) *Soient a et b deux nombres réels non nuls. Trouver les matrices qui commutent avec la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}.$$

Exercice 32 (Produits de grosses matrices !) *Calculer les produits de matrices suivants :*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 7 \\ -2 & 0 & 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 12 & 0 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 12 & 0 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 7 \\ -2 & 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Exercice 33 (Produit de matrices) *Calculer la matrice $(A - \mathrm{I}d)(A - 2\mathrm{I}d)(A - 3\mathrm{I}d)$ avec*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Exercice 34 (Produit de matrices triangulaires)

Un exemple : *Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Calculer AB et BA.*

Cas général : *Soient A et B des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures), montrer que leur produit est une matrice triangulaire supérieure (inférieures).*

Exercice 35 (Un modèle de prédation à deux niveaux) *Dans la chaéne alimentaire, sur une période, le lion consomme 4 gazelles, 5 gnous et 2 antilopes. Le guépard, plus agile, consomme 7 gazelles et 1 antilope. Pour ne pas se laisser abattre, les gazelles, gnous et antilopes consomment quelques végétaux : arbres, pelouses, herbes hautes et racines. Une gazelle consomme $100g$ de feuilles d'arbres, $300g$ de pelouse, $150g$ d'herbes hautes et $50g$ de racines. Un gnou consomme $500g$ de feuilles d'arbres, $100g$ de pelouse, $750g$ d'herbes hautes et pas de racines. Une antilope consomme $200g$ de feuilles d'arbres, $400g$ de pelouse, $250g$ d'herbes hautes et $150g$ de racines. Malheureusement la pollution a affecté les arbres et la pelouse. La concentration de pesticide est de $c_1 = 30$ par gramme de feuille d'arbre et de $c_2 = 50$ par gramme de pelouse. Bien heureusement les racines et les herbes hautes sont préservées. Calculer la masse totale de pesticide ingérée par le lion et le guépard en effectuant le produit de trois matrices que l'on explicitera.*

Exercice 36 (Puissance de matrice) *On considère la matrice*

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \gamma & -\beta \\ -\gamma & 0 & \alpha \\ \beta & -\alpha & 0 \end{bmatrix}$$

où $\alpha,\ \beta$ et γ sont des nombres réels. Etablir une relation simple entre M et M^3.

Exercice 37 (Identités remarquables ?) *Quelles sont parmi les matrices suivantes celles qui sont égalesà$(A - B)^2$, pour toutes les matrices A et B carrées d'ordre n ?*

$$A^2 - B^2 \quad (B - A)^2 \quad A^2 - 2AB + B^2 \quad (A - B)A - (A - B)B \quad A^2 - AB - BA + B^2.$$

Exercice 38 (Matrices nilpotentes) *On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente*[3] *d'ordre q si $A^{q-1} \neq 0$ et $A^q = 0$. Donner un exemple de matrices carrées 2×2 et 3×3 nilpotentes d'ordre 2. Donner ensuite un exemple de matrice carrée nilpotente d'ordre 3.*

Exercice 39 *Déterminer deux matrices A et B de $M_2(\mathbb{R})$ tels que : $AB = 0$ et $BA \neq 0$.*

Exercice 40 (Matrice d'adjacence d'un graphe) *Un graphe est un ensemble de points, dont certaines paires sont directement reliées par un "lien". Ces liens peuvent étre orientés, c'est-é-dire qu'un lien entre deux points u et v relie soit u vers v, soit v vers u : dans ce cas, le graphe est dit orienté. Sinon, les liens sont symétriques, et le graphe est non-orienté. Les points sont généralement appelés sommets, et les liens "arêtes". On peut représenter le graphe par une matrice, qu'on appelle matrice d'adjacence : le coefficient de la i-éme ligne et j-éme colonne est 1 s'il existe une aréte entre les sommets i et j, et 0 sinon. Remarquer que si le graphe est non orienté, sa matrice d'adjacence est symétrique.*

On considére un graphe à trois sommets, dont la matrice d'adjacence est $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Dessiner le graphe. Calculer A^2. Expliquer pourquoi le coefficient i, j de de A^2 donne le nombre de cheminsàdeux arétes entre i et j. Que donnent les coefficients de A^3 ?

Matrices inverses

Exercice 41 (Inverse d'une matrice d'élimination) *Soit E la matrice 3×3 qui lorsqu'on effectue le produit EA soustrait la premiére ligneàla deuxiéme, et P la matrice qui échange les lignes 2 et 3 . Quelle est l'opération qui va ramener la matriceàson état initial ? Ecrire E et E^{-1}. Vérifier que $EE^{-1} = E^{-1}E = \mathrm{Id}_3$.*

Exercice 42 (système linéaire et matrice inverse) *Soit A une matrice 3×3. Supposons qu'on sache trouver $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ et $\boldsymbol{z}$ tels que*

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad A\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad A\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Soit $X = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{z} \end{bmatrix}$. Calculer AX.

[3] nilpotente : du latin *nihil* : rien et *potere* pouvoir

Exercice 43 (CNS d'inversibilité d'une matrice 2×2) *Soit*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{K}$. On suppose que cette matrice est inversible. Calculer la matrice A^{-1} en fonction de $a, b, c,$ et d par identification. Exprimer la condition sur $a, b, c,$ et d pour que la matrice soit inversible.

Exercice 44 (Calcul de l'inverse d'une matrice par une puissance) *Soit*

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Calculer A^2 et montrer que $A^2 = 2\mathrm{Id}_2 - A$, en déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 45 (Calcul de l'inverse d'une matrice par produit de matrice et produit scalaire) *Soit A une matrice carrée d'ordre n. On appelle trace de A, qu'on note $\mathrm{T}r(A)$, la somme de ses éléments diagonaux. Soit A la matrice carrée d'ordre 3 suivante :*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1. *Calculer $B_0 = A - \mathrm{T}r(A)\mathrm{Id}_3$.*
2. *Calculer $B_1 = B_0 A$*
3. *Calculer $B_2 = B_1 - \frac{\mathrm{T}r(B_1)}{2}\mathrm{Id}_3$*
4. *Calculer $B_3 = B_2 A$*
5. *En déduire A^{-1}*

Cet algorithme[4] de calcul de l'inverse dé à Jean-Marie Souriau[5] ne nécessite donc qu'un seul produit matrice vecteur et deux calculs de trace. Il peut se généraliser à une matrice $n \times n$ et on peut démontrer qu'il donne effectivement l'inverse d'une matrice si celle-ci est inversible[6].

Exercice 46 (Puissance et inverse) *Soit A une matrice carrée d'ordre n ; on suppose que A^2 est une combinaison linéaire de A et Id_n : $A^2 = \alpha A + \beta \mathrm{Id}_n$.*

1. *Montrer que A^p est également une combinaison linéaire de A et Id_n pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.*

2. *Montrer que si β est non nul, alors A est inversible et que A^{-1} est encore combinaison linéaire de A et Id_n.*

3. *Application 1 : soit $A = J_n - \mathrm{Id}_n$, où J_n est la matrice Attila (envahie par les uns...), avec $n \geq 1$. Montrer que $A^2 = (n-2)\,A + (n-1)\,\mathrm{Id}_n$; en déduire que A est inversible, et déterminer son inverse.*

Application 2 : montrer que si $n = 2$, A^2 est toujours une combinaison linéaire de A et Id_2, et retrouver la formule donnant A^{-1} en utilisant 2.

Transposition, permutation

Exercice 47 *Verifier par le calcul sur les matrices suivantes que $(AB)^t = B^t\, A^t$ mais $\neq A^t\, B^t$.*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Exercice 48 (Transposition et produit scalaire) *Soient $X \in \mathbb{R}^n$ et $Y \in \mathbb{R}^n$. On peut donc aussi voir X et Y comme des vecteurs colonnes : $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que $X \cdot Y = X^t\, Y$.*
Calculer ensuite XY^t.

[4] On appelle algorithme de calcul une méthode constructive de calcul d'un objet mathématique, utilisant un nombre fini d'instructions.

[5] Jean-Marie Souriau est un mathématicien marseillais, né en 1922. Il est principalement connu pour ses travaux sur la géométrie symplectique dont il a été l'un des pionniers. Il a été professeur à l'université d'Aix Marseille 1 depuis 1958 jusqu'à sa retraite.

[6] Voir *Calcul linéaire*, de J.-M. Souriau, Tome 1, deuxième édition, "Euclide", Introduction aux études scientifiques, Presses Universitaires de France, Paris, 1964, ou `http://www.cmi.univ-mrs.fr/~herbin/L1/algo-souriau.pdf` pour un texte introductif.

Exercice 49 (Opérations sur les matrices symétriques) *Soient A et B deux matrices carrées symétriques. Les matrices A^2, AB, $A^2 - B^2$, $(A+B)(A-B)$, BAB et $BABA$ sont elles symétriques ? (si oui, justifier, sinon, contreexemple).*

Exercice 50 (Transposition et symétrie) *Soit A une matrice $n \times p$.*

1. Quelles sont les tailles respectives de AA^t et A^tA ?

2. Montrer que les coefficients diagonaux de AA^t et A^tA sont forcément positifs ou nuls.

3. Soit B une matrice $p \times p$ symétrique. Montrer que la matrice ABA^t est symétrique.

Exercice 51 (Matrices rigolotes)

Ecrire la matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont définis par $a_{i,j} = i + j$ et la matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont définis par $b_{i,j} = i - j$. Calculer AB et BA, en utilisant les deux techniques pour le produit (combinaison linéaire des colonnes, produit scalaire des lignes).

Ecrire les matrices A et B sous la forme $C + C^t$ et $C - C^t$ où C est une matrice bien choisie.

*Montrer que pour n'importe quelle matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si $A = C + C^t$ et $B = C - C^t$ alors $BA = -(AB)^t$. Dans quel cas a -t-on $AB = BA$? (*rép. : si C et C^t commutent*)*

Exercice 52 (Groupe linéaire et sous groupes) *Montrer que l'ensemble des matrices inversibles $GL_n(\mathbb{R})$ muni de la multiplication des matrices est un groupe. Quel est son élément neutre ? Ce groupe est-il commutatif ?*
Parmi les sous ensembles suivants de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dire quels sont ceux qui sont des sous-groupes[7] de $GL_n(\mathbb{R})$:
- *les matrices triangulaires supérieures,*
- *les matrices triangulaires inférieures dont tous les coefficient sont égauxà1,*
- *les matrices diagonales dont tous les coefficients sont non nuls,*
- *les matrices symétriques inversibles,*
- *les matrices inversibles Q telles que $Q^{-1} = Q^t$.*

Pour les ensembles qui sont des sous-groupes, dire ceux qui sont commutatifs.
Trouver d'autres ensembles de matrice qui sont des sous-groupes de $GL_n(\mathbb{R})$.

2.2 Elimination par les matrices

2.2.1 Echelonnement d'une matrice 3×3 et décomposition LU

Commençons par un exemple.
On considère le système $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, avec

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

On écrit la **matrice augmentée**, constituée de la matrice A et du second membre b.

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Gauss et opérations matricielles Allons y pour Gauss :
La première ligne a un 1 en première position (en gras dans la matrice), on dit que c'est un **pivot**. On va pouvoir diviser toute la premiére ligne par ce nombre pour en soustraire un multipleàtoutes les lignes d'aprés, dans le but de faire apparaître des 0 dans tout le bas de la colonne.
La deuxième équation a déjà un 0 dessous, donc on n' a rien besoin de faire. On veut ensuite annuler le premier coefficient de la troisième ligne. On retranche donc (-1) fois la première ligne à la troisième[8] :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \overset{\ell_3 \to \ell_3 + \ell_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \mathbf{2} & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

[7]Un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ est un sous-ensemble non vide de $GL_n(\mathbb{R})$ qui est stable par multiplication et inverse.

[8]Bien sûr, ceci revient à ajouter la premiére ligne ! il est cependant préférable de parler systématiquement de retrancher car c'est ce qu'on fait conceptuellement : pour l'élimination on enléve un multiple de la ligne du pivotàla ligne courante.

Ceci revient à multiplier $\tilde{A}$ à gauche par la matrice $T_{31}(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

La deuxième ligne a un terme non nul en deuxième position (2) : c'est un pivot. On va maintenant annuler le deuxième terme de la troisième ligne ; pour cela, on retranche 1/2 fois la ligne 2àla ligne 3 :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 2 \\ 0 & \mathbf{2} & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\ell_3 \to \ell_3 - 1/2\ell_2} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \mathbf{2} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -\mathbf{\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Ceci revient à multiplier la matrice précédente à gauche par la matrice $T_{32}(-\frac{1}{2}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$. On a ici obtenu une matrice sous forme triangulaire supérieure à trois pivots : on peut donc faire la remontée pour obtenir la solution du système, et on obtient (en notant x_i les composantes de $\boldsymbol{x}$) : $x_3 = 1$ puis $x_2 = 1$ et enfin $x_1 = 1$.
On a ainsi résolu le système linéaire.
Le fait de travailler sur la matrice augmentée est extrémement pratique car il permet de travailler simultanément sur les coefficients du système linéaire et sur le second membre.
Finalement, au moyen des opérations décrites ci-dessus, on a transformé le système linéaire

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \ \text{ en } \ U\boldsymbol{x} = T_{32}(-\frac{1}{2})T_{31}(1)\boldsymbol{b}, \ \text{ oé } \ U = T_{32}(-\frac{1}{2})T_{31}(1)A$$

est une matrice triangulaire supérieure.

Factorisation LU Tout va donc très bien pour ce système, mais supposons maintenant qu'on aitàrésoudre 3089 systèmes avec la méme matrice A mais 3089 seconds membres $\boldsymbol{b}$ différents[9]. Il serait un peu dommage de recommencer les opérations ci-dessus 3089 fois, alors qu'on peut en éviter une bonne partie. Comment faire ? L"idée est de "factoriser" la matrice A,c.à..d de l'écrire comme un produit $A = LU$, oé L est triangulaire inférieure (lower triangular) et U triangulaire supérieure (upper triangular). On reformule alors le système $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ sous la forme $LU\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ et on résout maintenant deux systèmes facilesàrésoudre car triangulaires : $L\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ et $U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.
La factorisation LU de la matrice découle immédiatement de l'algorithme de Gauss. Voyons comment sur l'exemple précédent.

1/ On remarque que $U = T_{32}(-\frac{1}{2})T_{31}(1)A$ peut aussi s'écrire $A = LU$, avec $L = (T_{32}(-\frac{1}{2})T_{31}(1))^{-1}$.

2/ On sait que $(T_{32}(-\frac{1}{2})T_{31}(1))^{-1} = (T_{31}(1))^{-1}(T_{32}(-\frac{1}{2})^{-1}$.

3/ Les matrices inverses $T_{31}(1)^{-1}$ et $T_{32}(-\frac{1}{2})^{-1}$ sont facilesàdéterminer : comme $T_{32}(-\frac{1}{2})^{-1}$ consisteàretrancher 1/2 fois la ligne 2àla ligne 3, l'opération inverse est d'ajouter 1/2 fois la ligne 2àla ligne 3, et donc

$$T_{32}(-\frac{1}{2})^{-1} = T_{32}(\frac{1}{2}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

De méme $T_{31}(1)^{-1} = T_{31}(-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et donc $L = T_{31}(1)^{-1}T_{32}(-\frac{1}{2})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$.

La matrice L est une matrice triangulaire inférieure (et c'est d'ailleurs pour cela qu'on l'appelle L, pour "lower" in English...) dont les coefficients sont particuliérement simplesàtrouver : les termes diagonaux sont tous égauxàun, et chaque terme non nul sous-diagonal $L_{i,j}$ est égal au coefficient par lequel on a multiplié la ligne pivot i avant de la retrancheràla ligne j.

4/ On a bien donc $A = LU$ avec L triangulaire inférieure (lower triangular) et U triangulaire supérieure (upper triangular).

La procédure qu'on vient d'expliquer s'appelle **méthode LU** pour la résolution des systèmes linéaires, et elle est d'une importance considérable dans les sciences de l'ingénieur, puisqu'elle est utilisée dans les programmes informatiques pour la résolution des systèmes linéaires.

[9]Ceci est courant dans les applications. Par exemple on peut vouloir calculer la réponse d'une structure de génie civilà3089 chargements différents.

Dans l'exemple que nous avons étudié, tout se passait très bien car on n'a pas eu de zéro en position pivotale. Si on a un zéro en position pivotale, la factorisation peut quand méme se faire, mais au prix d'une permutation. Le résultat général que l'on peut démontrer est que si la matrice A est inversible, alors il existe une matrice de permutation P, une matrice triangulaire inférieure L et une matrice triangulaire supérieure U telles que $PA = LU$

Théorème 2.17 (Factorisation LU) *Soit A une matrice inversible, alors il existe une matrice P de permutation, une matrice L triangulaire inférieure et U une matrice triangulaire supérieure telle que $PA = LU$.*

Le petit miracle de la décomposition LU est que la permutation P n'a pas besoin d'étre connue avant de mettre en oeuvre la factorisation ; elle est calculée au cours de l'algorithme, voir les algorithmes en annexe à la fin du polycopié.

Factorisation LDU On peut aussi procéderàune factorisation dite LDU en remarquant que si on divise chaque ligne de la matrice U obtenue par la décomposition LU par son coefficient diagonal (qui est non nul puisque la matrice est inversible) alors on obtient une matrice triangulaire supérieure $\tilde{U}$ avec que des uns sur la diagonale, et on peut écrire $U = D\tilde{U}$, oé D est la matrice diagonale contenant les pivots.
Lorsqu'on parle de factorisation LDU on sous entend donc toujours que la matrice U a des uns sur la diagonale. Sur l'exemple précédent, cette nouvelle décomposition s'écrit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = LDU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.2.2 Matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Définition 2.18 – *Soit $i \in \{1, \dots, n\}$, on définit pour $a \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$ la matrice $D_i(a) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui est diagonale et dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1 excepté le $i^{\text{ème}}$ qui est égal à a :*

$$D_i(a) = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ - i^{\text{ème}} \textit{ ligne} \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

– *Soient i, j deux entiers distincts de $\{1, \dots, n\}$ ($i \neq j$), on définit la matrice $E_{i,j}$ comme la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient i, j qui est egal à 1.*
– *Soient i, j deux entiers distincts de $\{1, \dots, n\}$ ($i \neq j$), pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ la matrice $T_{i,j}(\lambda) = \mathrm{Id}_n + \lambda E_{i,j}$:*

$$T_{i,j}(\lambda) = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \lambda & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ - i^{\text{ème}} \textit{ ligne} \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{l} \qquad | \\ \quad j^{\text{ème}} \textit{ colonne} \end{array} & \end{array}$$

Proposition 2.19 *On a*

1. $(D_i(a))^t = D_i(a)$, $(T_{i,j}(\lambda))^t = T_{j,i}(\lambda)$.

2. *Si* $a \neq 0$, $(D_i(a))^{-1} = D_i\left(\frac{1}{a}\right)$, $(T_{i,j}(\lambda))^{-1} = T_{i,j}(-\lambda)$.

Démonstration : Le premier point est immédiat. Montrons le deuxième point. Pour les dilatations, on remarque que le produit de deux matrices diagonales D_1 et D_2 est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les produits des coefficients diagonaux de D_1 et D_2. Effectuons le produit des matrices $T_{i,j}(\lambda)T_{i,j}(-\lambda)$. On a

$$T_{i,j}(\lambda)T_{i,j}(-\lambda) = (\mathrm{Id}_n + \lambda E_{i,j})(\mathrm{Id}_n - \lambda E_{i,j}) = \mathrm{Id}_n - \lambda^2 E_{i,j}E_{i,j} = \mathrm{Id}_n$$

car lorsque $i \neq j$, $E_{i,j}E_{i,j} = 0$.

Lemme 2.20 *Si $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est le produit de matrices élémentaires, alors E est inversible et son inverse est encore un produit de matrices élémentaires.*

Démonstration : On montre le résultat par récurrence sur le nombre de facteurs du produit, en utilisant la Proposition 2.12 et le fait que chaque matrice élémentaire est inversible et son inverse est une matrice élémentaire.

■

Théorème 2.21 (Opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice) *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.*

1. *La matrice $D_i(a)A$ est la matrice obtenue à partir de A en multipliant la $i^{ème}$ ligne de A par a.*
2. *La matrice $T_{i,j}(\lambda)A$ est la matrice obtenue à partir de A en ajoutant à la $i^{ème}$ ligne de A, λ fois la $j^{ème}$ ligne.*

Démonstration : On rappelle que la multiplication des matrices peut s'effectuer par lignes. Si on note $\ell_k(A)$ les lignes d'une matrice A, chaque ligne du produit de matrices MA s'écrit $\ell_i(MA) = \sum_{k=1}^n M_{i,k}\ell_k(A)$, où n est le nombre de colonnes de M (et de lignes de A). Avec $M = D_{i_0}(a)$ qui est diagonale, on a donc :

$$\ell_i(D_{i_0}(a)A) \quad = \quad \sum_{k=1}^n (D_{i_0}(a))_{i,k}\ell_k(A) = D_{i_0}(a))_{i,i}\ell_i(A) \begin{cases} a\ell_{i_0}(A) & \text{si } i = i_0, \\ \ell_i(A) & \text{sinon.} \end{cases}$$

En prenant maintenant $M = T_{i_0,j_0}(\lambda)$, on obtient :

$$\ell_i(T_{i_0,j_0}(\lambda)) \quad = \quad \sum_{k=1}^n (T_{i_0,j_0}(\lambda))_{i,k}\ell_k(A) = \begin{cases} \lambda\ell_{j_0}(A) + \ell_{i_0}(A) & \text{si } i = i_0, \\ \ell_i(A) & \text{sinon.} \end{cases}$$

■

2.2.3 Matrices échelonnées et pivot de Gauss

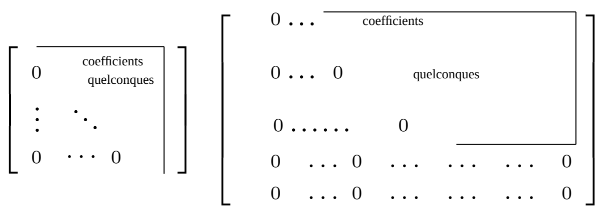
Définition 2.22 (Matrice échelonnée) *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On dit que la matrice A est* **échelonnée** *si elle vérifie les deux conditions suivantes :*

1. *Si une ligne est nulle, toutes les suivantes le sont.*
2. *Si la ligne i a son premier coefficient non nul sur la colonne j, alors le premier coefficient non nul de la ligne $i+1$ se trouve sur une colonne $k > j$.*

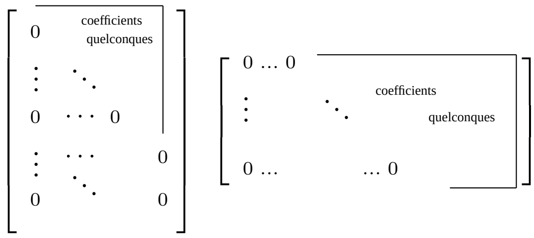
Autrement dit, une matrice $n \times p$ est sous forme échelonnée si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. s'il existe des lignes de zéros, alors elles sont toutes en bas de la matrice ;
2. si deux lignes successives sont non nulles, alors la seconde a plus de zéros à gauche que la première.

Voici à quoi ressemblent des matrices échelonnées :



ou encore :



Exemple 2.23 (Matrices échelonnées) *Dans toutes les matrices ci dessous $\star$ désigne n'importe quel réel.*

– *Dans* $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$

$$\begin{bmatrix} 2 & \star \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \star \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

– *Dans* $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$

$$\begin{bmatrix} 1 & \star & \star \\ 0 & 1 & \star \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & \star & \star \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 & \star \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 & \star \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

– *Dans* $\mathcal{M}_4(\mathbb{K})$

$$\begin{bmatrix} 1 & \star & \star & \star \\ 0 & 3 & \star & \star \\ 0 & 0 & 4 & \star \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 8 & \star & \star \\ 0 & 0 & 1 & \star \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

– *Une matrice $n \times n$ triangulaire supérieure (c.à.d. dont tous les coefficients $a_{i,j}$, $i > j$ sont nuls) est échelonnée.*

– *En revanche, la matrice* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ *n'est pas échelonnée.*

Dans le cas des matrices carrées, une matrice échelonnée est triangulaire supérieure :

Proposition 2.24 *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ échelonnée est triangulaire supérieure.*

Démonstration : Soit donc $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice échelonnée. On montre par récurrence sur $2 \le i \le n$ que $a_{i,j} = 0$ si $j < i$.
Pour $i = 2$, si la ligne 2 est nulle, la propriété est trivialement vraie. Si la ligne 2 n'est pas nulle, le point 2. de la définition des matrices échelonnées montre que sur la ligne 2 le premier coefficient non nul se trouve sur une colonne $k > 1$, autrement dit $a_{21} = 0$. La propriété est donc vraie pour $i = 2$.
Supposons la propriété vraie pour $2 \le i \le n - 1$ et montrons-la pour $i + 1$. Si la ligne $i + 1$ est nulle, la propriété est trivialement vraie. Si la ligne $i + 1$ n'est pas nulle, la ligne i n'est pas nulle (par le point 1. de la définition des matrices échelonnées). Alors, comme $a_{i,j} = 0$ si $j < i$ par hypothèse de récurrence, le premier terme non nul de la ligne i se trouve sur une colonne $j_0 \ge i$. D'après le point 2., le premier terme non nul de la ligne $i + 1$ se trouve donc sur une colonne $j \ge j_0 + 1 \ge i + 1$. Ainsi, $a_{i+1\,j} = 0$ pour tout $j < i + 1$.
La propriété est donc vraie pour tout i : la matrice A est donc triangulaire supérieure. ∎

2.2.4 Existence de la forme échelonnée, algorithme d'échelonnement

Théorème 2.25 (Echelonnement d'une matrice) *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Il existe une matrice $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ produit de matrices élémentaires telle que la matrice EA est échelonnée.*

Pour démontrer le théorème, on décrit un algorithme qui donne explicitement la matrice E. Avant de traiter le cas général, on va décrire l'algorithme sur un exemple.

On veut échelonner la matrice

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -8 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

L'idée est de procéder colonne par colonne. A l'étape i de l'algorithme, la matrice formée des i premières colonnes est échelonnée. Lorsqu'on arrive à l'étape 6 ($=$ le nombre de colonnes de A), la matrice obtenue est échelonnée. On commence par l'étape 1. Il s'agit d'échelonner le premier vecteur colonne :

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Comme il est non nul, cela signifie qu'on veut, par des manipulations de lignes (c'est-à-dire en multipliant A à gauche par des matrices élémentaires), se ramener au vecteur :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(Si le premier vecteur colonne était nul, en particulier il serait échelonné, on ne le modifierait pas et on passerait au vecteur colonne suivant). La première ligne de C_1 est un 1 donc on ne la change pas. Ensuite, en se servant de ce 1, on fait apparaître des 0 sur les lignes suivantes de C_1. On commence par retrancher à la troisième ligne 1 fois la première. Pour cela, on multiplie la matrice A par $T_{31}(-1)$ avec

$$T_{31}(-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On obtient la matrice $A_1 = T_{31}(-1)A$, c'est-à-dire :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -6 & -4 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(pour obtenir A_1 à partir de A, on a effectivement ajouté à la troisième ligne -1 fois la première). On a obtenu ce qu'on voulait : un 0 sur la troisième ligne du premier vecteur colonne. Pour obtenir un zéro sur la quatrième ligne du premier vecteur colonne, on ajoute à la quatrième ligne -1 fois la première, c'est-à-dire on multiplie la matrice A_1 par $T_{41}(-1)$:

$$T_{41}(-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On obtient la matrice $A_2 = T_{41}(-1)A_1 = T_{41}(-1)T_{31}(-1)A$:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -6 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -4 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

La première colonne de A_2 est de la forme

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

et donc on en a fini avec la première colonne, car celle-ci est échelonnée. De plus, on note qu'elle a 3 lignes nulles.
La deuxième étape consiste à échelonner la matrice formée des deux premières colonnes de A_2. Pour cela, on va échelonner le deuxième vecteur colonne de A_2 *à partir de la deuxième ligne* (noter que la deuxième ligne est la première ligne nulle de la première colonne). On verra que ça ne modifie pas la première colonne. La deuxième colonne de A_2 est

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Echelonner ce vecteur colonne à partir de la deuxième ligne veut dire qu' on se ramène par des combinaisons linéaires de lignes à une deuxième colonne du type

$$\begin{bmatrix} * \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

où $*$ représente un nombre quelconque. Cette opération revient à multiplier A_2 à gauche par des matrices élémentaires).
Il y a déjà un 1 sur la deuxième ligne. Pour faire apparaître un 0 sur la troisième ligne, on retranche à la troisième ligne -2 fois la seconde (on se sert ainsi du 1 qui est sur la deuxième ligne). On obtient

$$A_3 = T_{32}(2)A_2 = T_{32}(2)T_{41}(-1)T_{31}(-1)A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -4 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Noter qu'on n'a pas modifié la première colonne. Ceci est dû au fait qu'il y a un 0 sur la deuxième ligne de la première colonne.
On poursuit le travail sur la deuxième colonne, en gagnant un 0 sur la quatrième ligne. Pour cela, on retranche à la quatrième ligne -1 fois la deuxième, autrement dit, on multiplie A_3 par $T_{42}(1)$ pour obtenir

$$A_4 := T_{42}(1)T_{32}(2)T_{41}(-1)T_{31}(-1)A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

La deuxième colonne a bien la forme qu'on attendait. La première colonne n'a pas été modifiée. La matrice formée des deux premières colonnes de A_4 est échelonnée, et on note qu'elle a deux lignes nulles.
Passons à la troisième étape : on travaille sur la troisième colonne. Il s'agit de l'échelonner *à partir de la troisième ligne* (qui est la première ligne nulle de la matrice formée des deux premières colonnes de A_4). La matrice formée des trois premières colonnes de A_4 sera ainsi échelonnée. Comme le vecteur colonne constitué des 2 dernières lignes de la troisième colonne est nul, on n'a rien à faire sur la troisième colonne : elle est déjà échelonnée à partir de la troisième ligne. On remarque que la matrice formée des trois premières colonnes de A_4 a encore deux lignes nulles.
On passe à la quatrième colonne, qu'on veut échelonner *à partir de la troisième ligne* car c'est la première ligne nulle de la matrice formée des trois premières colonnes de A_4. Ainsi, on veut ramener le quatrième vecteur colonne à un vecteur colonne de la forme :

$$\begin{bmatrix} * \\ * \\ a \\ 0 \end{bmatrix}.$$

avec a non nul. On voit que pour cela, il suffit de retrancher à la quatrième ligne $2/3$ fois la troisième, autrement dit de multiplier A_4 par $T_{43}(-2/3)$. On obtient

$$A_5 := T_{43}(2)T_{42}(1)T_{32}(2)T_{41}(-1)T_{31}(-1)A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1/3 \end{bmatrix}.$$

Ceci achève le travail sur la quatrième colonne : la matrice formée des 4 premières colonnes est échelonnée. De plus, elle a 1 ligne nulle. Pour la cinquième étape : le cinquième vecteur colonne est échelonné à partir de la quatrième ligne. Donc on n'y touche pas. La matrice formée des 5 premières colonnes est échelonnée et n'a pas de ligne nulle. L'algorithme s'arrête donc ici : la matrice A_5 elle-même est échelonnée.
De plus, on a $A_5 = EA$ avec

$$E := T_{43}(-2/3)T_{42}(1)T_{32}(2)T_{41}(-1)T_{31}(-1).$$

Pour calculer simplement E, on part de la matrice $T_{31}(-1)$,

$$T_{31}(-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On sait que $T_{41}(-1)T_{31}(-1)$ est obtenue à partir de $T_{31}(-1)$ en retranchant à la quatrième ligne 1 fois la première (parce que c'est l'effet de la multiplication à gauche par $T_{41}(-1)$). On obtient donc :

$$T_{41}(-1)T_{31}(-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

De même, $T_{32}(2)T_{41}(-1)T_{31}(-1)$ est obtenue à partir de $T_{41}(-1)T_{31}(-1)$ en retranchant à la troisième ligne -2 fois la deuxième (parce que c'est l'effet de la multiplication à gauche par $T_{32}(2)$). On obtient donc :

$$T_{32}(2)T_{41}(-1)T_{31}(-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Et ainsi de suite. On trouve finalement

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & -2/3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pour obtenir E en même temps qu'une matrice échelonnée à partir de A, on peut aussi échelonner directement la matrice *augmentée* $\begin{bmatrix} A & \mathrm{I}d_4 \end{bmatrix}$ jusqu'à la dernière colonne de A. Mais ceci n'est jamais effectué en pratique. D'abord la matrice E n'est pas très intéressante en soi ; c'est la matrice $L = E^{-1}$ qui est utile en pratique : dans le cas où on n'a pas besoin de permutation de lignes, on obtient la factorisation $A = LU$ de la matrice avec une matrice $L = E^{-1}$ triangulaire inférieure et une matrice U triangulaire supérieure. Dans le cas de l'exemple ci-dessus, la matrice L s'écrit : $L = E^{-1} \left(T_{32}(2)T_{41}(-1)T_{31}(-1)\right)^{-1} = T_{31}(1)T_{41}(1)T_{32}(2)$. Les coefficients de la matrice L s'obtiennent donc très facilement à partir des coefficients utilisés lors de l'échelonnement pour la construction de la matrice U.

On va maintenant démontrer le Théorème 2.25 en décrivant l'algorithme d'échelonnement dans le cas général. On commence par considérer le cas d'une matrice colonne (c'est-à-dire $p = 1$).

Algorithme d'échelonnement d'un vecteur colonne

Lemme 2.26 *Soit $A = (a_i)_{i=1,\dots,n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ un vecteur non nul. Alors il existe une matrice $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ produit de matrices élémentaires et $a \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$, tels que* $EA = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$.

Démonstration :

► Si $a_1 \neq 0$ alors on utilise a_1 pour éliminer les coefficients qui sont en-dessous, à l'aide des matrices élémentaires. On commence par retrancher à la deuxième ligne a_2/a_1 fois la première :

$$T_{2,1}\left(-a_2/a_1\right)A = \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

On procède de même avec les lignes suivantes :

$$T_{n,1}\left(-a_n/a_1\right)\cdots T_{2,1}\left(-a_2/a_1\right)A = \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

► Si $a_1 = 0$, il existe $i \geq 2$ tel que $a_i \neq 0$ car on a supposé $A \neq 0$. Auquel cas, si on ajoute à la première ligne 1 fois la $i^{ième}$ ligne, on obtient

$$T_{1,i}\left(1\right)A = \begin{bmatrix} a_i \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

On est alors ramené au cas précédent.

$$T_{n,1}(-a_n/a_i)\cdots T_{2,1}(-a_2/a_i)T_{1,i}\left(1\right)A = \begin{bmatrix} a_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

■

Dans le cas où a_1 est nul, on aurait aussi pu intervertir les lignes 1 et i au lieu d'ajouter à la première ligne la $i^{ième}$.

Pour passer au cas général, on a besoin de la généralisation suivante. On dit qu'un vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est échelonné à partir de la ligne $1 \leq i \leq n$ si le vecteur $A' \in \mathcal{M}_{n-i+1,1}$ constitué des lignes $i, \ldots, n$ du vecteur X est échelonné (au sens de la Définition 2.22). En particulier, un vecteur est échelonné s'il est échelonné à partir de la ligne 1.

L'algorithme d'échelonnement d'un vecteur colonne peut être généralisé pour obtenir un vecteur échelonné à partir d'une ligne quelconque $1 \leq i \leq n-1$. Pour cela, il suffit d'éliminer les lignes qui sont au-dessous de i en utilisant le coefficient qui est sur la ligne i. Plus précisément,

Lemme 2.27 *Soit $A = (a_k)_{k=1,\ldots,n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $1 \leq i \leq n-1$. On suppose que l'une des lignes $i, \ldots, n$ de A n'est pas nulle. Alors il existe une matrice $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ produit de matrices élémentaires et $a \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$, tels que* $EA = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ a \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$

Démonstration : C'est la même preuve que pour le lemme précédent sauf qu'on ne regarde que les lignes qui sont au-dessous de la $i^{ième}$.

► Si $a_i \neq 0$ alors en retranchant à la $(i+1)^{ième}$ ligne a_{i+1}/a_i fois la $i^{ième}$ ligne, on obtient

$$T_{i+1,i}\left(\frac{-a_{i+1}}{a_i}\right)A = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ a_i \\ 0 \\ a_{i+2} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

et en faisant de même pour toutes les lignes suivantes, on obtient finalement

$$T_{n,i}\left(\frac{-a_n}{a_i}\right)\cdots T_{i+1,i}\left(\frac{-a_{i+1}}{a_i}\right)A = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ a_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

► Si $a_i = 0$, il existe $j \geq i+1$ tel que $a_j \neq 0$. Auquel cas, si on ajoute la $j^{ième}$ ligne à la $i^{ième}$ ligne, on obtient

$$T_{i,j}(1)A = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ a_j \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

On est alors ramené au cas précédent. Finalement,

$$T_{n,i}(-a_n/a_j)\cdots T_{i+1,i}(-a_{i+1}/a_j)T_{i,j}\,(1)\,A = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ a_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

■

On observe que dans cet algorithme, on modifie seulement les lignes $i,\dots,n$ de A. En effet, les matrices élémentaires par lesquelles on multiplie A n'agissent que sur ces lignes : les coefficients non diagonaux et non nuls étant tous placés sur ces lignes-là.

Algorithme d'échelonnement d'une matrice et preuve du théorème 2.25. On rappelle que si A est une matrice, $c_j(A)$ désigne la $j^{ième}$ colonne de A. On notera $\begin{bmatrix} c_1(A) & \dots & c_j(A) \end{bmatrix}$ la matrice constituée des j premières colonnes de la matrice A.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On montre par récurrence sur $1 \leq k \leq p$ qu'il existe une matrice $E_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ produit de matrices élémentaires telle que $\begin{bmatrix} c_1(E_kA) & \dots & c_k(E_kA) \end{bmatrix}$ est une matrice échelonnée.

► Pour $k = 1$, si $c_1(A) = 0$, la propriété est trivialement vraie avec $E_1 = \mathrm{I}d$. Si $c_1(A) \neq 0$, on applique le lemme 2.27 à $c_1(A)$ avec $i = 1$: il existe E_1 telle que $E_1 c_1(A) = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$. Alors $[c_1(E_1 A)] = E_1 c_1(A)$ est bien une matrice échelonnée.

► Supposons la propriété vraie à l'ordre $k \leq p-1$ et montrons-la à l'ordre $k+1$. Par hypothèse de récurrence, il existe une matrice $E_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ produit de matrices élémentaires telle que la matrice $A_k := \begin{bmatrix} c_1(E_k A) & \dots & c_k(E_k A) \end{bmatrix}$ est une matrice échelonnée.
On distingue plusieurs cas.

- Si A_k n'a aucune ligne nulle, on pose $E_{k+1} = E_k$ et on vérifie que $\begin{bmatrix} c_1(E_{k+1}A) & \dots & c_{k+1}(E_{k+1}A) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_k & c_{k+1}(E_k A) \end{bmatrix}$ est bien une matrice échelonnée.
- Sinon, A_k a une ligne nulle. Notons i_k l'indice de la première ligne nulle de A_k. Alors les lignes $i_{k+1}, \dots, n$ de A_k sont nulles, car A_k est échelonnée. Si les lignes $i_k, \dots, n$ de $c_{k+1}(E_k A)$ sont aussi toutes nulles, on peut poser $E_{k+1} = E_k$ et on a bien $\begin{bmatrix} c_1(E_{k+1}A) & \dots & c_{k+1}(E_{k+1}A) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_k & c_{k+1}(E_k A) \end{bmatrix}$ qui est échelonnée.
  Si au contraire $c_{k+1}(E_k A)$ a au moins une ligne non nulle parmi les lignes $i_k, \dots, n$, alors on applique le lemme 2.27 à $c_{k+1}(E_k A)$ avec $i = i_k$. Il existe une matrice $F_{k+1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ produit de matrices élémentaires telle que
  $$F_{k+1} c_{k+1}(E_k A) = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{i_k - 1} \\ a \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$
  On a déjà observé dans la preuve du lemme 2.27 que multiplier une matrice à gauche par F_{k+1} ne modifiait pas les lignes $i \leq i_k$. Comme les lignes $i_k, \dots, n$ de A_k sont nulles, on en déduit $F_{k+1} A_k = A_k$. Donc
  $$\begin{bmatrix} c_1(F_{k+1} E_k A) & \dots & c_{k+1}(F_{k+1} E_k A) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_k & c_{k+1}(F_{k+1} E_k A) \end{bmatrix}$$
  est bien une matrice échelonnée. Dans ce cas, on pose donc $E_{k+1} = F_{k+1} E_k$.

► La propriété est vraie pour tout k, en particulier pour $k = p$. Le Théorème 2.25 est démontré.

Remarque 2.28 *Lorsque l'on rencontre un zéro en position pivotale (et non pas un "pivot nul", car, par définition, un pivot n'est jamais nul) durant l'échelonnement de la matrice on peut, au lieu de transformer la ligne en question, permuter la ligne où se trouve ce zéro avec une des lignes qui se trouve en dessous de celle où se trouve ce zéro. C'est d'ailleurs ce qui est effectué en pratique dans les programmes informatiques qui effectuent la méthode de Gauss, ou qui effectuent la décomposition LU d'une matrice telle qu'on l'a introduite dans la première partie de ce chapitre.*
La matrice de permutation $P_{i,j}$ des lignes i et j est la matrice identité, sauf pour les lignes i et j : la ligne i a des zéros partout sauf en colonne j où il y a un 1 ; la ligne j a des zéros partout sauf en colonne i où il y a un 1. Elle peut encore s'écrire : $P_{i,j} = \mathrm{I}d_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$. Par exemple pour $n = 2$:

$$P_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

et pour $n = 6$:

$$P_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad P_{25} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On peut vérifier facilement que multiplier une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par la matrice $P_{i,j}$ revient à intervertir les lignes i et j. Evidemment lorsqu'on permute les lignes de la matrice du système linéaire, on doit également permuter les lignes correspondantes du vecteur second membre lorsqu'on résout un système linéaire. Ceci se fait de maniére automatique lorsqu'on travaille sur la matrice augmentée.

Dans la suite, il sera utile de repérer quelles sont les colonnes pivotales d'une matrice échelonnée, dont on a déjà parlé lors de l'élimination de Gauss. En voici une définition pour une matrice échelonnée rectangulaire $n \times p$.

Définition 2.29 (Pivots, colonnes pivotales, rang) *On note r le nombre de lignes non nulles d'une matrice $n \times p$ échelonnée. On appelle* ***pivot*** *le premier terme non nul de chaque ligne non nulle de la matrice échelonnée. On appelle colonnes pivotales d'une matrice échelonnée les colonnes dans lesquelles aparaissent les pivots des lignes non nulles (attention ce ne sont pas forcément les r premières colonnes de la matrice). On note $k_1, \ldots, k_r$ les indices de ces colonnes. On appelle colonnes non pivotales les autres colonnes, dont les indices sont notés $k_{r+1}, \ldots, k_p$.*
Les colonnes pivotales sont donc les colonnes $c_j(A)$ telles que $j \in J$, où $J = \{k_1, \ldots, k_r\}$ est l'ensemble des indices des colonnes dans lesquelles apparaissent les pivots.
On définit le rang de la matrice comme le nombre de lignes non nulles (ou de colonnes pivotales).

2.2.5 Exercices

Exercice 53 (Des petits systèmes gentils) *Résoudre les systèmes linéaires suivants en utilisant l'échelonnement :*

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 6x + y = 1/2 \end{cases}$$

Exercice 54 (Echelonnement et factorisation LU et LDU) *Echelonner les matrices suivantes, et lorsqu'elle existe, donner leur décomposition LU et LDU*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

Exercice 55 (Des systèmes un peu plus gros) *Résoudre en utilisant l'algorithme du pivot de Gauss (ou l'échelonnement) les systèmes suivants :*

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 5x + 4y + 3z = 2 \\ 6x + 3y + 2z = -4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y - 2z = 1 \\ -x + 3y = 0 \\ -2y + z = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 2z + 4t = 2 \\ y + 3z - 4t = -2 \\ z - 2t = 0 \\ x + y - z + 2t = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y - 2z + 4t + u = 0 \\ y + 3z - 4t + 2u = 0 \\ x + z - 2t + 3u = 0 \\ x + y + 4z - 6t + 5u = 0 \\ 3y + 2t = 0 \end{cases}$$

Exercice 56 (Matrice à paramètre) *Echelonner pour $t \in \mathbb{R}$ la matrice suivante :*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1-t \\ 1+t & -1 & 2 \\ 2 & -t & 3 \end{bmatrix}$$

Pour quelles valeurs du paramétre t, la matrice est-elle inversible ?

2.3 Calcul de l'inverse d'une matrice, échelonnement total

Soit A une matrice carrée d'ordre n inversible, dont on veut calculer l'inverse. On cherche donc une matrice A^{-1} telle que $AA^{-1} = \mathrm{Id}_n$. Les colonnes de Id_n sont les vecteurs (colonne)[10] $\boldsymbol{e}_i$ dont la i-ème composante est égale

[10] Quand on dit vecteur sans préciser c'est toujours vecteur colonne ; de même, on identifie les éléments de $\mathbb{R}^n$ à l'ensemble $\mathcal{M}_{n,1}$ des matrices à n lignes et 1 colonne.

à 1 et toutes les autres nulles. Supposons qu'on connaisse A^{-1}. Quand on multiplie A par la première colonne de A^{-1}, on obtient la première colonne de la matrice AA^{-1}, qui est égale ? la matrice $\mathrm{I}d_n$; cette première colonne est le vecteur $\boldsymbol{e}_1$. De même, quand on multiplie A par la i-ème colonne de A^{-1}, on obtient la i-ème colonne de $AA^{-1} = \mathrm{I}d_n$, c.à.d. le vecteur $\boldsymbol{e}_i$. On a donc, en notant $\boldsymbol{c}_i(A^{-1})$ la i-ème colonne de A^{-1} :

$$A\,\boldsymbol{c}_i(A^{-1}) = \boldsymbol{e}_i,\ i = 1, \ldots, n$$

Le calcul de A^{-1} peut donc s'effectuer en résolvant les n systèmes linéaires avec matrice A, inconnue $\boldsymbol{c}_i(A^{-1})$ et second membre $\boldsymbol{e}_i$.
Remarquons donc tout de suite que l'inversion d'une matrice est beaucoup plus chère que la résolution d'un système linéaire (n fois, très précisément...). Il est donc idiot d'inverser une matrice pour résoudre un système linéaire. Par contre, il est intéressant de savoir comment on peut trouver l'inverse d'une matrice par la méthode de Gauss-Jordan, en s'inspirant de celle effectuée pour résoudre le système linéaire.
Au lieu d'introduire une matrice augmentée avec la matrice de départ et un vecteur second membre, on introduit maintenant une matrice augmentée avec la matrice de départ et n vecteurs second membre (les vecteurs $\boldsymbol{e}_i$) ; ceci revient à considérer la matrice augmentée $n \times 2n$ constituée de la matrice A et la matrice $\mathrm{I}d_n$:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & \mathrm{I}d_n \end{bmatrix}.$$

Si la matrice A est inversible, en appliquant l'algorithme de Gauss-Jordan qu'on décrit si dessous, on obtient alors l'inverse de la matrice dans la partie droite (où se trouveait auparavant la matrice identité) de la forme "totalement échelonné" de la matrice augmentée.
Si A est inversible, sa forme totalement échelonnée R est $\mathrm{I}d_n$, et l'algorithme de Gauss-Jordan sur $\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & \mathrm{I}d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \boldsymbol{e}_1 & \ldots & \boldsymbol{e}_n \end{bmatrix}$ donne :

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} R & \boldsymbol{c}_1(A^{-1}) & \ldots & \boldsymbol{c}_n(A^{-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{I}d_n & A^{-1} \end{bmatrix}.$$

Voyons ceci d'abord sur un exemple.

2.3.1 Exemple de calcul de l'inverse d'une matrice 2 2

Exemple 2.30 *Prenons une matrice* 2×2 *:* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$*. On écrit la matrice augmentée :* $\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & \mathrm{I}d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$*, et on applique Gauss-Jordan. On commence par Gauss :*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\ell_2 \to \ell_2 - 3\ell_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

et on effectue ensuite la partie Jordan, qui consiste à rendre la matrice diagonale :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \overset{\ell_1 \to \ell_1 - 2\ell_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Gauss Jordan donne donc $A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$*. On vérifie qu'on a bien* $AA^{-1} = \mathrm{I}d_2$

2.3.2 Inversion d'une matrice 3 3

Exemple 2.31 *Considérons la matrice* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$*. On écrit la matrice augmentée* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
On commence par appliquer l'algorithme de Gauss, c'est-à-dire se ramener à une matrice échelonnée :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\ell_3 \to \ell_3 - \ell_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\ell_3 \to \ell_3 - (1/2)\ell_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

On a obtenu une matrice échelonnée. On reprend alors l'algorithme à la fin de Gauss, et on écrit maintenant la partie "Jordan"[11] de l'algorithme dit de Gauss-Jordan.
Pour cela, on fait apparaître des 0 au-dessus des pivots en commençant par les colonnes les plus à droite, et en progressant vers la gauche.
On multiplie la dernière ligne par -2 pour obtenir le pivot 1 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\ell_3 \to -2\ell_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Puis on metàzéro le troisième coefficient de la deuxième ligne (à l'aide de la troisième) :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\ell_2 \to \ell_2 + \ell_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

On annule ensuite le troisième coefficient de la première ligne (toujours à l'aide de la troisième) :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\ell_1 \to \ell_1 - \ell_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

On multiplie enfin la deuxième ligne par 1/2 pour obtenir le pivot 1 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\ell_2 \to 1/2\ell_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Les trois premières colonnes forment la matrice identité. Elle constitue la forme totalement échelonnée de la matrice A : c'est le cas pour toute matrice inversible. On verra plus loin que la réciproque est également vraie : si la forme totalement échelonnée de la matrice A est l'identité, A est inversible.

2.3.3 Echelonnement total

Définition 2.32 (Matrice totalement échelonnée)
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On dit que A est totalement échelonnée si :

1. *A est échelonnée,*
2. *le premier coefficient non nul de chaque ligne non nulle est égal à 1,*
3. *tous les éléments qui sont dans la colonne au dessus du premier coefficient non nul (et égal à 1) d'une ligne sont nuls.*

Notons que dans une forme totalement échelonnée, les pivots sont toujours égaux à 1, ce qu'on n'a pas demandé pour les matrices échelonnées.

Exemple 2.33 (Matrices totalement échelonnées ou non)
– *La matrice identité Id_n est totalement échelonnée et a n colonnes pivotales : $r = n$.*
– *La matrice nulle O_n est totalement échelonnée et n'a aucune colonne pivotale : $r = 0$.*
– *La matrice suivante est totalement échelonnée :*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Elle a deux colonnes pivotales : la première, $k_1 = 1$, et la troisième : $k_2 = 3$, et une colonne non pivotale, la seconde : $k_3 = 2$.

[11] Marie Ennemond Camille Jordan, né le 5 janvier 1838 à Lyon (Rhéne) et mort le 22 janvier 1922, est un mathématicien français, connu à la fois pour son travail fondamental dans la théorie des groupes et pour son cours d'analyse.

– *La matrice* 4×6 *:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

est sous forme totalement échelonnée, et a trois colonnes pivotales $k_1 = 2$*,* $k_2 = 4, k_3 = 5$*, et trois colonnes non pivotales :* $k_4 = 1$*,* $k_5 = 3, k_6 = 6$.

– *La matrice suivante est échelonnée, mais pas totalement échelonnée :*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

– *La matrice suivante n'est ni totalement échelonnée ni même échelonnée :*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Théorème 2.34 (Echelonnement total) *Soit* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$*. Il existe une matrice* E *produit de matrices élémentaires telle que la matrice* EA *est totalement échelonnée.*

Encore une fois, la preuve du théorème donne un algorithme qui permet de calculer explicitement E. D'après le Théorème 2.25, on peut supposer que A est une matrice échelonnée.

Algorithme d'échelonnement total On commence par le cas d'une matrice colonne ($p = 1$).

Lemme 2.35 *Soit* $A = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *un vecteur échelonné avec* $a_i \neq 0$*. Alors il existe une matrice* $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *produit de matrices élémentaires telle que* $EA = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$*, le* 1 *étant sur la ligne* i*.*

Il suffit de prendre $E = T_{1,i}(-a_1) \dots T_{i-1,i}(-a_{i-1})D_i(1/a_i)$.
Une remarque importante pour la suite de l'algorithme : Multiplier une matrice B à gauche par cette matrice E ne modifie pas ses lignes $i + 1, \dots, n$. Si de plus la ligne i de B est nulle, $EB = B$.

On traite maintenant le cas général d'une matrice échelonnée $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ qu'on veut totalement échelonner. Il s'agit de repérer les "colonnes pivotales" pour faire apparaître des 0 au-dessus des pivots. On commence par les colonnes pivotales les plus à droite, et on progresse vers la gauche. Comme on va le voir, cela permet, lorsqu'on s'occupe de la colonne pivotale i, de ne pas modifier les colonnes situées à gauche de la colonne i, et de ne pas modifier non plus les colonnes pivotales situées à droite de la colonne i. La raison en est simple : lorsqu'on fait des manipulations sur la colonne i, dont le pivot est sur la ligne notée j, on ajoute un multiple de cette ligne j à des lignes situées au-dessus de la ligne j. Toutes les colonnes à gauche de i ont un 0 sur la ligne j (car la matrice est échelonnée) donc ces colonnes ne sont pas modifiées. Toutes les colonnes pivotales situées à droite de i ont un 0 sur la ligne j (car on les a totalement échelonnées aux étapes précédentes) donc elles ne sont pas modifiées. Voyons l'algorithme en détail.

On note $J = (j_1, \dots, j_r)$ l'ensemble des indices des colonnes pivotales de A (rangés par ordre croissant). On définit par récurrence sur $0 \le l \le r-1$ des matrices A_{r-l} échelonnées et telles que : pour tout $1 \le i \le r$, A_i est de la forme $E_i A$, où E_i est un produit de matrices élémentaires , A_i a pour ensemble de colonnes pivotales celui indexé par J et A_i a ses colonnes pivotales $j_i, \dots, j_r$ totalement échelonnée.
Pour construire A_r, on applique le Lemme 2.35 à $c_{j_r}(A)$: il existe E_r produit de matrices élémentaires telle que $E_r c_{j_r}(A) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^t$ où le 1 est situé sur la ligne r. Alors la matrice $A_r := E_r A$ a ses lignes $r{+}1, \dots, n$ égales à celles de la matrice A et sont donc nulles. De plus, comme la matrice $\begin{bmatrix} c_1(A) & \dots & c_{j_{r-1}}(A) \end{bmatrix}$ a ses lignes $r, \dots, n$ nulles, la matrice A_r a ses colonnes $1, \dots, j_{r-1}$ égales à celles de A. En particulier, A_r est une matrice échelonnée.
Supposons que les matrices $A_r, \dots, A_{i+1}$ ont été construites. On définit alors $A_i := F_i A_{i+1}$ où F_i est la matrice du Lemme 2.35 appliqué à $c_{j_i}(A_{i+1})$. Comme précédemment, les colonnes $1, \dots, j_{i-1}$ de A_i sont égales à celles de A_{i+1}. De plus, c'est aussi le cas des colonnes pivotales $j_{i+1}, \dots, j_r$ (car elles ont un 0 sur la ligne i). Donc A_i vérifie bien les conditions exigées et on pose $E_i = F_i E_{i+1}$. La matrice A_1 est alors totalement échelonnée et de la forme $E_1 A$, où E_1 est un produit de matrices élémentaires. Le Théorème 2.34 est démontré.

2.3.4 Exercices

Exercice 57 (Matrices 2×2 totalement échelonnées) *Donner toutes les matrices 2×2 de coefficients égaux à 0 ou 1 et qui soient totalement échelonnées.*

Exercice 58 (Inverse de matrices par échelonnement total) *Echelonner les matrices suivantes et dire si elles sont inversibles ; le cas échéant calculer leurs inverses par échelonnement total :*

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

et pour ceux qui en veulent encore...

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & -6 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice 59 ***Un petit modèle de prédation, suite...*** *Dans la situation décrite dans l'exercice 13, si on suppose que le 13 janvier 2010 au matin, il ne reste que 2 loups, 4 serpents et une chèvre, quel était le nombre de loups, serpents et chèvres le 10 janvier au soir ?*

Exercice 60 (Matrices 2×2 totalement échelonnées) *Montrer que les formes totalement échelonnées de A et A^{-1} sont identiques.*

Exercice 61 (Une matrice connue en géométrie) *Soit θ un nombre réel dans $[0, 2\pi[$. On considére la matrice $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.*

1. *Montrer que R_θ est inversible et calculer son inverse.*
2. *Calculer R_θ^n pour $n \in \mathbb{Z}$.*
3. *On considère la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) & 0 \\ sin(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vérifier que A est inversible et que son inverse A^{-1} s'écrit

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} (R_\theta)^{-1} & 0_{12} \\ 0_{21} & 1 \end{bmatrix}$$

Quelle est la nature géométrique de l'application $\boldsymbol{u} \mapsto A\boldsymbol{u}$?

Chapitre 3

Systèmes linéaires et espaces vectoriels

3.1 Espaces et sous-espaces

On a déjà beaucoup parlé dans les chapitres précédents des sous-espaces de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$: les droites et plans passant par l'origine sont des sous-espaces vectoriels, au sens où ils sont stables par combinaison linéaire. Mais $\mathbb{R}^n$ lui-même est aussi stable par combinaison linéaire : muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire, on dit qu'il a une structure d'espace vectoriel, dont on va maintenant donner une définition précise.

3.1.1 Définitions

Définition 3.1 (Espace vectoriel) *Soit $\mathbb{K}$ un corps, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ si*

1. *E muni d'une loi de composition interne $+$ appelée* **addition** *(c.à.d. une application de $E \times E \to E$) est un groupe commutatif, i.e. les propriétés suivantes sont vérifiées :*
   - *(a) Il existe un élément appelé* **élément neutre pour l'addition** $\mathbf{0}_E \in E$ *tel que pour tout $\boldsymbol{u} \in E$, $\mathbf{0}_E + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} + \mathbf{0}_E = \boldsymbol{u}$.*
   - *(b) Pour tous $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in E$, on a $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \in E$.*
   - *(c) Pour tous $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in E$, $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$.*
   - *(d) Pour tout $\boldsymbol{u} \in E$, il existe un $\boldsymbol{v} \in E$ tel que $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} = \mathbf{0}_E$. Un tel $\boldsymbol{v}$ est unique et on le note $\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{u}$.*
2. *E est muni d'une loi de composition externe appelée* **multiplication***, c.à.d. une application de $E \times \mathbb{K} \to E$ ($\lambda x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E$) telle que pour tous $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,*
   - *(a) Il existe un élément appelé élément neutre pour la multiplication $1_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}$ tel que $1_{\mathbb{K}}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}1_{\mathbb{K}} = \boldsymbol{u}$,*
   - *(b) $\lambda(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{u} + \lambda\boldsymbol{v}$,*
   - *(c) $(\lambda + \mu)\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u} + \mu\boldsymbol{u}$,*
   - *(d) $\lambda(\mu\boldsymbol{u}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{u}$.*

On dira plus brièvement que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ou $\mathbb{K}$-ev. Cette définition paraît longue et compliquée... en fait il suffit de retenir qu'il y a 8 propriétés à vérifier, 4 liées à l'addition (les propriétés de groupe commutatif) et 4 liées à la multiplication par un scalaire (élément neutre, distributivité "dans les deux sens", associativité).

Exemple 3.2
– *Ensembles qui sont des espaces vectoriels :*
- • $\mathbb{R}^2$ *est un* $\mathbb{R}$*-ev,*
- • $\mathbb{C}^2$ *est un* $\mathbb{C}$*-ev et un* $\mathbb{R}$*-ev,*
- • $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, $M_{2,1}(\mathbb{K}), M_{1,2}(\mathbb{K}), M_{n,p}(\mathbb{K})$ *munis de l'addition des matrices et de la multiplication par un scalaire (de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) sont des $\mathbb{K}$-ev,*
- • *L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$,*
- • *L'ensemble des fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$,*
- • *L'ensemble des fonctions $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ solutions de l'équation $u'' + u' + u = 0$.*

– *Ensembles qui ne sont pas des espaces vectoriels :*
  - $\mathbb{Z}$ *n'est pas un* $\mathbb{R}$*-ev,*
  - $(\mathbb{R}_+)^2$ *n'est pas un* $\mathbb{R}$*-ev,*
  - *L'ensemble des fonctions de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *qui valent 1 en 0,*
  - *L'ensemble des fonctions* $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *solutions de l'équation* $u'' + u' + u = 1$.

Définition 3.3 (Sous-espace vectoriel) *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. On dit que* $F \subset E$ *est un sous-espace vectoriel de* E *si* $0 \in F$ *et si* F *est stable par combinaison linéaire, c.à.d pour tous* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in F$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\lambda \boldsymbol{u} + \mu \boldsymbol{v} \in F$.

Proposition 3.4 *Un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel est un espace vectoriel.*

Cette proposition est facile à démontrer et laissée en exercice, mais elle est extrêmement utile : dans la plupart des cas, lorsqu'on vous demandera de montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, il suffira de montrer que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel que vous aurez bien choisi et dans lequel cet ensemble est inclus. Par exemple, si on vous demande de montrer que l'ensemble des couples (x, y) de $\mathbb{R}^2$ vérifiant $x + y = 0$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, il vous suffira de montrer que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Définition 3.5 (Espace vectoriel engendré) *Soient* $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ k *éléments d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E*. On appelle* **espace vectoriel engendré par la famille** $(\boldsymbol{u}_i)_{i=1,\ldots,k}$ *la partie de* E *constitué des combinaisons linéaires des éléments* $\boldsymbol{u}_i$ *:*

$$\mathrm{Vect}(\boldsymbol{u}_1, \ldots \boldsymbol{u}_k) \stackrel{def}{=} \left\{ x \in E, x = \alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{u}_k = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{u}_i, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R} \right\}.$$

Soit P *une partie de* E*, on appelle sous-espace vectoriel engendré par* P *l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de* P.

La terminologie et la notation suggèrent que l'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille de vecteurs est un sous-espace vectoriel : c'est effectivement le cas (exercice !).

3.1.2 Espace des colonnes ou image d'une matrice

Définition 3.6 (Espace des colonnes d'une matrice) *Soit une matrice* A *d'ordre* $n \times p$*. On appelle espace des colonnes de de* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$*, noté* $C(A)$*, l'ensemble des combinaisons linéaires des colonnes de la matrice* A*. L'ensemble* $C(A)$ *est donc le sous-espace vectoriel de* $\mathbb{K}^n$ *engendré par les vecteurs colonnes de* A.

$$C(A) = \mathrm{Vect}\{c_1(A), \ldots c_p(A)\}.$$

C'est donc un sous-espace vectoriel.

Définition 3.7 (Image d'une matrice) *Soit une matrice* A *d'ordre* $n \times p$*. On appelle image de* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$*, noté* $\mathrm{Im}(A)$*, l'ensemble des* $\boldsymbol{y} \in \mathbb{K}^n$ *tels qu'il existe* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^p$ *vérifiant* $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.

Proposition 3.8 *Soit* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$*. Alors l'image* $\mathrm{Im}(A)$ *de la matrice* A *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Démonstration : Soient $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in \mathrm{Im}(A)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Il existe $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ tels que $A\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{y}_1$ et $A\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{y}_2$. Alors $\boldsymbol{y}_1 + \lambda \boldsymbol{y}_2 = A(\boldsymbol{x}_1 + \lambda \boldsymbol{x}_2)$, ce qui montre que $\boldsymbol{y}_1 + \lambda \boldsymbol{y}_2 \in \mathrm{Im}(A)$. ■

En fait l'espace des colonnes d'une matrice A et son image sont un seul et même sous-espace vectoriel. Pour montrer ceci, on rappelle que si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_p \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$, alors

– le vecteur colonne $A\boldsymbol{x}$ est la combinaison linéaire des vecteurs colonnes de la matrice A associée aux coefficients $x_1, \ldots, x_p$.

– le vecteur ligne $\boldsymbol{y}A$ est la combinaison linéaire des vecteurs lignes de la matrice A associée aux coefficients $y_1, \ldots, y_n$.

Proposition 3.9 *Soit une matrice de taille $n \times p$. L'image de $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est égal à l'espace des colonnes $C(A)$.*

Démonstration : Pour montrer que les ensembles $\mathrm{Im}(A)$ et $C(A)$ sont égaux, il faut montrer que $C(A) \subset \mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{Im}(A) \subset C(A)$. Soit $\boldsymbol{c}_i(A)$ la i-ème colonne de A. Alors $\boldsymbol{c}_i(A) = A\boldsymbol{e}_i$, où $\boldsymbol{e}_i$ est le vecteur de $\mathbb{K}^p$ dont les composantes sont toutes nulles sauf la i-ème qui est égale à 1. On a donc bien $\boldsymbol{c}_i(A) \in \mathrm{Im}(A)$ pour tout $i = 1, \ldots, p$. Toutes les colonnes de A sont donc dans $\mathrm{Im}(A)$ et comme $\mathrm{Im}(A)$ est un sous-espace vectoriel, toutes les combinaisons linéaires de ces colonnes aussi. On a donc bien $C(A) \subset \mathrm{Im}(A)$.
Réciproquement, si $\boldsymbol{y} \in \mathrm{Im}(A)$, alors il existe $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^p$ tel que $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$, et donc $\boldsymbol{y}$ est une combinaison linéaire des colonnes de A, ce qui prouve que $\boldsymbol{y} \in C(A)$. On a donc bien montré $\mathrm{Im}(A) \subset C(A)$ et donc $\mathrm{Im}(A) = C(A)$.

■

L'image $\mathrm{Im}(A)$ de la matrice A est l'ensemble $C(A)$ des combinaisons linéaires des vecteurs colonnes de A. C'est donc aussi le sous-espace vectoriel engendré par les colonnes de la matrice A.

Exemple Déterminons l'image des matrices suivantes :
$\mathrm{Id}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

$\mathrm{Im}(\mathrm{Id}_2) = \mathbb{R}^2$, $\mathrm{Im}(A)$ est la droite passant par l'origine et de vecteur directeur $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

$\mathrm{Im}(A) = \{\lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

$\mathrm{Im}(B) = \{\lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$.

3.1.3 Exercices

Espaces et sous-espaces

Exercice 62 (Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.) *Montrer que l'espace $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*

Exercice 63 (Espace vectoriel : oui ou non ?) *Les ensembles suivants sont-ils des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels ?*
– $\{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ *tels que* $x_3 \geq 0\}$.
– $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
– *Un cercle dans le plan, une sphère dans l'espace, un rectangle dans le plan.*
– *L'union de deux droites du plan.*
– *Un plan passant par l'origine dans $\mathbb{R}^3$.*
– $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x + y + z = 0\}$
– $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ 4x + y - z = 0\}$
– $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ ; \ x^2 - y + z = 0\}$
– $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ ; \ x + y + z = 0, \ t - x = 1\}$
– $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ ; \ x + y + z = 0, \ t - y = 0\}$
– $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ 4x + y - z = 0, \ x - 4y + z = 0\}$
– *Le sous ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*
– *Le sous ensemble des matrices non inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*
– *Le sous ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*
– *Le sous ensemble des matrices anti-symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*
– *Le sous ensemble des matrices non symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

Exercice 64 (Construction de sous-espaces) *Pour chacun des espaces vectoriels E suivants, trouver un sous-espace F de E puis un sous-espace G de F.*

1. *E est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs* $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ *et* $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
2. *E est l'ensemble des matrices symétriques 2×2 (rappel, une matrice $n \times n$ est symétrique si ses coefficients sont tels que $a_{i,j} = a_{j,i}$ pour $i, j = 1, \ldots, n$)*

3. *E est l'ensemble des fonctions y de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont la dérivée troisième est nulle.*

Décrire chacun des espaces E précédents de deux manières différentes : "E est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de .... "et "E est l'ensemble de toutes les solutions de l'équation ... "

Exercice 65 (Un sous-espace est un espace !) *Soit E un espace vectoriel et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. Montrer que F est un espace vectoriel.*

Exercice 66 (Droite dans $\mathbb{R}^2$) *Donner une équation cartésienne et une équation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ qui passe par 0 et qui a pour vecteur directeur $(1, -3)$. Montrer que $\mathcal{D}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.*

Exercice 67 (Espace vectoriel des polynômes) *Soit E l'ensemble des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 4. Montrer que E est un espace vectoriel. Montrer que l'ensemble des polynômes admettant les racines $x = a$ et $x = b \neq a$ est un sous-espace vectoriel F de E.*

Exercice 68 (Commutant d'une matrice) *Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$. On nomme commutant de A et on note $\mathrm{Com}(A)$ l'ensemble des $B \in M_2(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$.*

1. *Montrer que $\mathrm{Com}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$.*
2. *Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k \in \mathrm{Com}(A)$.*
3. *Déterminer $\mathrm{Com}(A)$ pour*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Exercice 69 (Sous-espaces engendrés) *Dans $\mathbb{R}^3$ montrer que les vecteurs $V_1 = (1, 2, 3)$ et $V_2 = (2, -1, 1)$ engendrent le même sous-espace vectoriel que les vecteurs $U_1 = (1, 0, 1)$ et $U_2 = (0, 1, 1)$.*

Exercice 70 (Espace engendré dans $\mathbb{C}$) *On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des nombres complexes. On considère les parties H_1, H_2, H_3, H_4 ci-dessous, et pour $i = 1, \ldots 4$, on note F_i le sous-espace vectoriel de E engendré par H_i.*

$$\begin{aligned} H_1 &= \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 3\} \\ H_2 &= \{z \in \mathbb{C},\ \mathit{Arg}(z) = \pi/3 \text{ ou } \mathit{Arg}(z) = -2\pi/3\} \\ H_3 &= \{z \in \mathbb{C},\ z = i\overline{z}\} \\ H_4 &= \{z \in \mathbb{C},\ z + \overline{z} \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

1. *Représenter graphiquement les sous-ensembles H_i, $i = 1, \ldots 4$.*
2. *Déterminer lesquels sont des sous-espaces vectoriels de E.*
3. *Déterminer les sous-espaces F_i, $i = 1, \ldots 4$.*

Image d'une matrice

Exercice 71 (Image d'une matrice) *On suppose donnés trois vecteurs de $\mathbb{R}^n$: $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$ et $\boldsymbol{b}_3$. On se demande si on peut construire une matrice A (dont on peut choisir les dimensions) telle que les systèmes linéaires $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1$ et $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_2$ admettent une solution, et le système $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_3$ n'en admette pas. Comment vérifier que ceci est possible ? Comment construire A ?*

Prendre comme exemples :

1. $n = 3$, $\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ *et* $\boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.
2. $n = 3$, $\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ *et* $\boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Exercice 72 (Espace des colonnes) *Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.*
1. Montrer que $C(AB) \subset C(A)$.
2. Donner un exemple pour lequel $C(AB) \neq C(A)$
3. Montrer que les matrices A et $\begin{bmatrix} A & AB \end{bmatrix}$ ont même espaces colonnes.
4. Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, a -t-on $C(A^2) = C(A)$?

Exercice 73 (Somme de deux sous-espaces vectoriels) *Soient E un espace vectoriel, F et G des sous-espaces vectoriels de E. On note $F + G$ l'ensemble des vecteurs de E qui s'écrivent comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.*
1. Montrer que $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer par un contre exemple (dans $\mathbb{R}^2$) que l'ensemble $F \cup G$ n'est pas forcément un sous-espace vectoriel.
3. Montrer que l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de $F \cup G$ qu'on notera Vect($F \cup G$) (pourquoi ?) est égal à $F + G$ (rappel : pour montrer l'égalité de deux ensembles il faut montrer l'inclusion dans les deux sens).
4. Soient A et $B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, $E = C(A)$ et $F = C(B)$. De quelle matrice $E + F$ est il l'espace des colonnes ?

3.2 Systèmes linéaires homogènes

Un système linéaire homogène est un système de la forme $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. On a déjà vu que si A est une marice carrée inversible, alors la seule solution de ce système est $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Mais si A n'est pas inversible, ou si A n'est même pas carrée, il peut exister des $\boldsymbol{x}$ non nuls tels que $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Ces vecteurs constituent le noyau de la matrice A. Résoudre le système $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ revient à déterminer le noyau de A.

3.2.1 Noyau d'une matrice

Définition 3.10 (Noyau d'une matrice) *Soit A une matrice de taille $n \times p$. On appelle noyau de $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, noté $\mathrm{Ker}(A)$, l'ensemble des $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^p$ tels que $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ (où $\mathbf{0}$ désigne le vecteur colonne de $\mathbb{K}^n$ dont toutes les composantes sont nulles).*

Proposition 3.11 *Soit une matrice de taille $n \times p$. Le noyau de $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.*

Remarquez que le noyau d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$ alors que son image (ou espace des colonnes) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. Par contre, si $\boldsymbol{b} \neq 0$, l'ensemble des solutions du système linéaire $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, qui est donc l'ensemble $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^p$ tels que $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel, car $\mathbf{0}$ n'est pas solution du sysème $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Déterminer le noyau de A revient à résoudre le système linéaire $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. On appelle système linéaire homogène un tel système linéaire, dont le second membre est nul. Un l système linéaire homogène admet toujours au moins une solution, le vecteur nul (de $\mathbb{K}^p$) puisque $A\mathbf{0}_p = \mathbf{0}_n$. D'autre part, lorsqu'on multiplie une matrice $n \times p$ par un vecteur colonne $p \times 1$, on obtient un vecteur $n \times 1$ qui est une combinaison linéaire des colonnes de A. Donc, résoudre $A\boldsymbol{x} = 0$, c'est trouver les combinaisons linéaires des colonnes de A qui donnent un vecteur nul ; les composantes x_i des solutions $\boldsymbol{x}$ sont les coefficients des combinaisons linéaires qui conviennent.
Il sera très utile, pour trouver le noyau d'une matrice, d'utiliser sa forme totalement échelonnée que nous avons introduite au chapitre précédent. A ce propos, on rappelle que le rang d'une matrice échelonnée est le nombre r de colonnes pivotales de la matrice. Une matrice à n lignes et p colonnes a donc r colonnes pivotales et $p - r$ colonnes non pivotales.
Remarquons que les noyaux de A et de sa forme totalement échelonnée R sont identiques. En effet, les lignes de R sont obtenues par combinaisons linéaires des lignes de A et les systèmes linéaires $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ et $R\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ sont équivalents. Plus précisément :

Proposition 3.12 *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et R sa forme totalement échelonnée. Alors $\mathrm{Ker}A = \mathrm{Ker}R$.*

Démonstration : Par le théorème 2.34, $R = EA$ où E est une matrice inversible et donc dire que $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ est équivalent à dire que $R\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. ■

On verra plus loin (Proposition 3.18) que si on connaît les dimensions n et p d'une matrice A et son noyau $\mathrm{Ker}A$, alors on peut déterminer complètement la forme totalement échelonnée de A. En particulier, la forme totalement échelonnée d'une matrice est unique.

3.2.2 Détermination du noyau

On va maintenant voir comment on peut déterminer le noyau d'une matrice à partir de sa forme totalement échelonnée. Commençons par le cas d'une matrice A carrée ($n = p$).

Cas d'une matrice A carrée ($n = p$) inversible On a déjà vu dans le chapitre précédent que si A est inversible, la seule solution du système $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ est $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. En effet, en mutipliant les deux membres du système par A^{-1}, on obtient immédiatement $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. On verra que la matrice A est inversible si et seulement si la forme totalement échelonnée de A est $R = \mathrm{Id}_n$ (voir Lemme 3.28 et Corollaire 3.29). Dans ce cas, la matrice R a donc $r = n$ colonnes pivotales et aucune colonne non pivotale, et donc son rang est $r = n$.
Le système $A\boldsymbol{x} = 0$ est équivalent au système $R\boldsymbol{x} = 0$, ce qui donne encore que $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ est **l'unique solution** du système linéaire $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. On a donc $\mathrm{Ker}(A) = \{\mathbf{0}\}$.

Cas d'une matrice A carrée ($n = p$) non inversible Dans ce cas, la forme totalement échelonnée de A est $R \neq \mathrm{Id}_n$, et son rang (le nombre de colonnes pivotales) $r < n$: la matrice R possède au moins une ligne de 0 (en bas), et la matrice augmentée $\tilde{R}$ également (puisque le second membre est nul).

Exemple 3.13 *Considérons par exemple la matrice* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, *et cherchons à déterminer le noyau de* A. *C'est l'ensemble des* $\boldsymbol{x}$ *tels que* $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, *c.à.d. les solutions du système :*

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 = 0 \end{array} \right.$$

Faisons l'élimination : $\ell_2 \to \ell_2 - 2\ell_1$. *On obtient :*

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \right.$$

La deuxième équation est toujours satisfaite, et donc il n'y a en fait qu'une seule équation. Le noyau de A *est la droite d'équation* $x_1 + 2x_2 = 0$.
Un moyen simple de décrire cette droite de solutions est de choisir un point de la droite (dite solution spéciale). Alors les points de la droite sont tous des multiples de ce point (parce que la droite passe par $\mathbf{0}$*). Choisissons par exemple* $x_2 = 1$, *dans ce cas on a* $x_1 = -2$, *et donc une solution particulière est* $\boldsymbol{s} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. *Le noyau de* A *contient tous les multiples de* $\boldsymbol{s} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$\mathrm{Ker}(A) = \left\{ t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Cas d'une matrice rectangulaire quelconque Si on connait une solution spéciale $\boldsymbol{s}$ de $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, alors tous les multiples de $\boldsymbol{s}$ (c.à.d. les vecteurs de la forme $\lambda\boldsymbol{s}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$) sont solutions de $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

Exemple 3.14 *Le système linéaire à 1 inconnue et 3 équations* $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, *s'écrit aussi* $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ *où* A *est une matrice à une ligne et 3 colonnes :* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, *dont la forme totalement échelonnée est* $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, *qui n'a donc qu'un pivot (*$r = 1$*). Le noyau de* A *est le plan* $\mathcal{P}$ *de* $\mathbb{R}^3$ *d'équation* $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, *dont on peut trouver deux solutions spéciales non colinéaires, qu'on trouve en choissant d'abord* $x_2 = 1$ *et* $x_3 = 0$ *puis* $x_2 = 0$ *et* $x_3 = 1$ *:*

$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \textit{et } \mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Notons que les variables x_2 *et* x_3 *correspondant aux colonnes non pivotales sont arbitraires, ce sont des "variables libres" (au sens où on peut les choisir comme on veut) mais une fois qu'elles sont choisies, la première (et unique) ligne de la matrice totalement échelonnée* R *nous donne* $x_1 = -x_2 - x_3$.
La première colonne de A *contient le pivot, et donc la première composante n'est pas libre. On choisit des solutions spéciales grâce aux variables libres correspondant aux colonnes non pivotales.*

Remarquons enfin qu'à partir des solutions spéciales $\mathbf{s_1}$ *et* $\mathbf{s_2}$*, on peut obtenir, par combinaison linéaire, tout le plan* $\mathcal{P}$ *d'équation* $x_1 + x_2 + x_3 = 0$*. En effet, pour n'importe quel vecteur* $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ *du plan* $\mathcal{P}$*, on peut écrire*

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x_2 \boldsymbol{s}_1 + x_3 \boldsymbol{s}_2,$$

grâce au fait que $-x_2 - x_3 = x_1$*. Les vecteurs* $\boldsymbol{s}_1$ *et* $\boldsymbol{s}_2$ *"engendrent" le plan, au sens où le sous-espace vectoriel engendré par* $\boldsymbol{s}_1$ *et* $\boldsymbol{s}_2$ *est le plan* $\mathcal{P}$ *d'équation* $x_1 + x_2 + x_3 = 0$*.*

On peut donc décrire $\mathrm{Ker}A$ *(le plan* $\mathcal{P}$*) comme l'ensemble des combinaisons linéaires des solutions spéciales qu'on vient de calculer :*

$$\mathrm{Ker}A = \left\{ \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Les solutions spéciales de $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ peuvent en fait se calculer très simplement à partir de la forme totalement échelonnée R de A : Si on regarde comment sont faites les colonnes de R, on se rend compte qu'une colonne non pivotale peut s'écrire comme combinaison linéaire des colonnes pivotales précédentes comme on va le démontrer dans la proposition suivante. Et ce sont justement les coefficients de cette combinaison linéaire qui donnent une solution de $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ (qu'on appelle solution spéciale), puisque (rappel) le produit $A\boldsymbol{x}$ est une combinaison linéaire des colonnes de A !

Proposition 3.15 *Soit* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *une matrice échelonnée. Alors toute colonne non pivotale est*
1) nulle si elle est située à gauche de la première colonne pivotale,
2) combinaison linéaire des colonnes pivotales qui la précèdent sinon.

Démonstration : On commence par le cas où A est totalement échelonnée. On note r le nombre de lignes non nulles. Soit $J = (j_1, \ldots, j_r)$ les indices de ses colonnes pivotales (plus précisément, la colonne j_i est celle qui contient le premier terme non nul de la ligne i). Le point 2. de la définition des matrices échelonnées dit que $j_1 < \cdots < j_r$. Alors

$$c_{j_i}(A) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.2.1}$$

où le 1 est sur la i ème ligne. En effet,
1) il y a des 0 en dessous du 1, car le premier terme non nul de la ligne $i+1$ est sur la colonne $j_{i+1} > j_i$, le premier terme non nul de la ligne $i+2$ est sur la colonne $j_{i+2} > j_i$, etc...
2) il y a des 0 en-dessus du 1 car dans une matrice totalement échelonnée, il y a des 0 au-dessus d'un pivot (= le premier terme non nul d'une ligne).

Soit $j \notin J$. Si $j < j_1$, $c_j(A) = 0$ et le résultat est trivial. Si $j > j_r$, $c_j(A)$ est de la forme $\begin{bmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{r,j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ (car seules les r premières lignes sont non nulles). On peut écrire $c_j(A) = a_{1,j} c_{j_1}(A) + \cdots + a_{r,j} c_{j_r}(A)$, d'où le résultat dans ce cas.

Enfin, dans le cas où j vérifie $j_i < j < j_{i+1}$, $c_j(A)$ est de la forme $\begin{bmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{i,j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$. En effet, toutes les lignes à partir de $i+1$ sont nulles puisque le premier terme non nul de la ligne $i+1$ est sur la colonne $j_{i+1} > j$, le premier terme non nul de la ligne $i+2$ est sur la colonne $j_{i+2} > j$, etc.... On peut écrire $c_j(A) = a_{1,j}c_{j_1}(A) + \cdots + a_{i,j_i}c_{j_i}(A)$. Dans ce cas aussi, $c_j(A)$ s'écrit comme combinaison linéaire des colonnes qui la précèdent.
On considère maintenant le cas où A est simplement (et pas forcément totalement) échelonnée. Alors l'algorithme d'échelonnement total montre qu'il existe une matrice inversible E telle que EA soit totalement échelonnée et de plus A et EA ont les mêmes indices de colonnes pivotales (puisque l'échelonnement total consiste simplement à faire apparaître des 0 au-dessus des premiers termes non nuls de chaque ligne de A : les colonnes contenant le premier terme non nul d'une ligne restent donc les mêmes). On note J l'ensemble des indices des colonnes pivotales et soit $j \notin J$. Si $j < j_1$, alors $c_j(EA) = 0$ et donc $c_j(A) = E^{-1}c_j(EA) = 0$. Sinon soient $j_1, \ldots, j_k$ l'ensemble des indices de J qui sont inférieurs à j. Par le cas précédent, il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ tels que $c_j(EA) = \alpha_1 c_{j_1}(EA) + \cdots + \alpha_k c_{j_k}(EA)$. Donc

$$c_j(A) = c_j(E^{-1}EA) = E^{-1}c_j(EA) = E^{-1}\left(\alpha_1 c_{j_1}(EA) + \cdots + \alpha_k c_{j_k}(EA)\right).$$
$$= \alpha_1 E^{-1}c_{j_1}(EA) + \cdots + \alpha_k E^{-1}c_{j_k}(EA) = \alpha_1 c_{j_1}(A) + \cdots + \alpha_k c_{j_k}(A).$$

■

Exemple 3.16 *Prenons par exemple la matrice 3×4 sous forme totalement échelonnée*

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{2} & 0 & \mathbf{3} \\ 0 & \mathbf{0} & 1 & -\mathbf{1} \\ 0 & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

*où on a écrit en gras les colonnes **non** pivotales. Notons $\boldsymbol{c}_j(R)$, $j = 1, \ldots, 4$ les 4 colonnes de R.*
Les deux colonnes pivotales sont $\boldsymbol{c}_1(R)$ et $\boldsymbol{c}_3(R)$, et les deux non pivotales $\boldsymbol{c}_2(R)$ et $\boldsymbol{c}_4(R)$.
Chercher $\boldsymbol{x}$ tel que $R\boldsymbol{x} = 0$ revient à chercher $x_1, \ldots, x_4$ tels que $\sum_{i=1}^4 x_i \boldsymbol{c}_i(R) = 0$. Or la lecture de la matrice totalement échelonnée R donne

$$\boldsymbol{c}_2(R) = 2\boldsymbol{c}_1(R) \text{ et } \boldsymbol{c}_4(R) = 3\boldsymbol{c}_1(R) - \boldsymbol{c}_3(R)$$

ce qui s'écrit aussi (pour bien faire apparaître le produit matrice vecteur) :

$$-2\,\boldsymbol{c}_1(R) + \boldsymbol{c}_2(R) + 0\,\boldsymbol{c}_3(R) + 0\,\boldsymbol{c}_4(R) = \mathbf{0} \text{ et } -3\,\boldsymbol{c}_1(R) + 0\,\boldsymbol{c}_2(R) + \boldsymbol{c}_3(R) + 1\,\boldsymbol{c}_4(R) = \mathbf{0}.$$

On a donc trouvé ainsi deux solutions qui vérifient $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, qui sont

$$\boldsymbol{s}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } \boldsymbol{s}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ici encore, on peut remarquer que tout vecteur $\boldsymbol{x}$ qui vérifie $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de $\boldsymbol{s}_1$ et $\boldsymbol{s}_2$. En effet, pour n'importe quel vecteur $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ vérifiant $A\boldsymbol{x} = 0$, on a : $x_1 = -2x_2 - 3x_4$ et $x_3 = x_4$; on peut donc écrire

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = x_2\boldsymbol{s}_1 + x_4\boldsymbol{s}_2.$$

Les vecteurs $\boldsymbol{s}_1$ et $\boldsymbol{s}_2$ "engendrent" l'espace des solutions de $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

Le noyau de A (ou de manière équivalente, l'ensemble des solutions du système $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$) s'écrit alors :

$$\mathrm{Ker}A = \left\{ \lambda \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \; \lambda \in \mathbb{R},\, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Rappelons que si R est la forme totalement échelonnée de A, les systèmes $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ et $R\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ sont équivalents. Les noyaux de A et de R sont donc identiques (voir proposition 3.12) et égaux à l'ensemble des combinaisons linéaires des solutions spéciales obtenues comme expliqué dans l'exemple précédent à partir des colonnes non pivotales de la matrice R.
Il y a autant de solutions spéciales à $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ que de colonnes non pivotales, c.à.d. $p-r$. Dans l'exemple ci-dessus : $p = 4$, $r = 2$, donc il y a 2 solutions spéciales.

Cas d'une matrice $n \times p$ avec $p > n$ Remarquons que dans le dernier exemple ci-dessus, on a une matrice rectangulaire "couchée", c.à.d. avec plus d'inconnues que de lignes : $p > n$. Dans ce cas, le noyau de la matrice est forcément non réduit à $\mathbf{0}$. En effet le nombre r de pivots (ou de lignes non nulles) est forcément inférieur aux nombres de lignes, n. Comme $p > n$, il existe au moins une colonne non pivotale, et cette colonne est une combinaison linéaire d'autres colonnes de A. Ce qui montre qu'il existe $\boldsymbol{s}$ non nul (ses composantes sont les coefficients de la combinaison linéaire écrite sous la forme "combinaison = 0") tel que $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Il y a donc une infinité de solutions au système $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ (tous les multiples de s), comme dans l'exemple 3.16 ci-dessus.

Unicité de la forme totalement échelonnée Question : la forme totalement échelonnée d'une matrice A est elle unique ? La réponse est oui, et on a même un résultat plus fort que cela : une matrice totalement échelonnée est entièrement déterminée par ses dimensions et son noyau.

Exemple 3.17 *Soit A une matrice 3×4 dont le noyau est l'ensemble $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2; x_1 = x_4 = 0, x_2 - 2x_3 = 0\}$. Construisons sa forme totalement échelonnée. La première colonne de R est donc non nulle, sinon le vecteur $(1, 0, 0, 0)$ serait dans $\mathrm{Ker}S$. On a donc forcément $\boldsymbol{c}_1(R) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Pour la même raison, la deuxième colonne est aussi non nulle. De plus, le vecteur $(1, -1, 0, 0)$ n'est pas dans le noyau. Donc forcément $\boldsymbol{c}_2(R) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. La troisième colonne est entièrement déterminée par l'équation du noyau : $\boldsymbol{c}_3(R) = 2\boldsymbol{c}_2(R)$. Enfin, la quatrième colonne ne dépend pas des trois premières puisque x_4 n'est pas lié aux autres variables dans les équations du noyau de A. On a donc un seul choix possible pour R :*

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La construction qu'on vient de faire dans cet exemple peut se généraliser à n'importe quelle matrice.

Proposition 3.18 *Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ deux matrices de même noyau et R, S des matrices totalement échelonnées à partir de A et B respectivement. Alors $R = S$.*

Preuve : Dans la suite, on note $E_i \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ le vecteur colonne qui a des 0 partout sauf un 1 sur la ligne i. Comme $\mathrm{Ker}A = \mathrm{Ker}R$ et $\mathrm{Ker}B = \mathrm{Ker}S$, il suffit de montrer que si deux matrices totalement échelonnées R et S ont même noyau, alors elles sont égales. On montre par récurrence sur $1 \leq j \leq p$ que pour tout $1 \leq k \leq j$, $c_k(R) = c_k(S)$.

1) Pour $j = 1$, si $c_1(R) = 0$, alors le vecteur E_1 est dans le noyau de R, donc dans le noyau de S, donc $c_1(S) = 0$. Même observation en échangeant les rôles de R et S. Donc $c_1(R)$ et $c_1(S)$ sont simultanément nuls ou simultanément non nuls. Dans les 2 cas, ils sont égaux.
2) Supposons la propriété vraie jusqu'à l'ordre $j \leq p-1$ et montrons-la pour $j+1$. Par hypothèse de récurrence, $c_k(R) = c_k(S)$ pour tout $k \leq j$. Notons l le nombre de colonnes pivotales à droite de $j+1$ et $k_1 < \cdots < k_l$ les

indices de ces colonnes (pour R et pour S). Si $c_{j+1}(R)$ est non pivotale, alors c'est une combinaison linéaire des colonnes pivotales précédentes :

$$c_{j+1}(R) = \sum_{i=1}^{l} R_{i,j+1} c_{k_i}(R).$$

On en déduit que le vecteur $\boldsymbol{s}_{j+1} := \sum_{i=1}^{l} R_{i,j+1} E_{k_i} - E_{j+1}$ est dans le noyau de R (on utilise que $RE_i = c_i(R)$). Donc $\boldsymbol{s}_{j+1}$ est dans le noyau de S. Donc (en faisant le calcul dans le sens contraire),

$$c_{j+1}(S) = \sum_{i=1}^{l} R_{i,j+1} c_{k_i}(S).$$

Donc $c_{j+1}(S) = c_{j+1}(R)$. Même observation en échangeant R et S. Donc $c_{j+1}(R)$ et $c_{j+1}(S)$ sont simultanément non pivotales ou simulatnément pivotales. Dans le premier cas, le calcul précédent montre qu'elles sont égales. Dans le second cas, elles sont aussi égales puisque c'est la colonne pivotale $l + 1$ (qui a des 0 partout sauf un 1 sur la ligne $l + 1$).

3) Conclusion : pour tout $1 \leq j \leq p$, $c_j(R) = c_j(S)$. Autrement dit, $R = S$.

On déduit immédiatement de la Proposition 3.18 que pour toute matrice A, il existe une unique matrice totalement échelonnée R telle qu'il existe $E \in GL_n(\mathbb{K})$ vérifiant $EA = R$.

Cette proposition permet également de définir le rang d'une matrice quelconque A (qu'on n'a défini jusqu'à présent que pour des matrices échelonnées).

Définition 3.19 *Le rang de A est le rang de **la** matrice totalement échelonnée R associée à A (c.à.d. le nombre de lignes non nulles ou de colonnes pivotales de la matrice R).*

3.2.3 Familles libres, Indépendance des colonnes pivotales

Définition 3.20 *Soient $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p$ p éléments d'un espace vectoriel E. On dit que la famille $(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p)$ est libre (ou encore que les vecteurs $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p$ sont linéairement independants) si pour tout $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$,*

$$\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_p \boldsymbol{x}_p = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_p = 0.$$

Autrement dit, une famille de vecteurs est libre si la seule manière d'écrire une combinaison linéaire nulle de ces vecteurs est de prendre tous les coefficients égaux à 0. Il revient au même de dire qu'aucun des vecteurs de la famille ne peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.

Exemples

1) Les vecteurs colonnes $E_i \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (composés de 0 à l'exception d'un 1 sur la $i^{ème}$ ligne) sont linéairement indépendants dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
2) Les matrices élémentaires $E_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ forment une famille libre de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
3) La famille $\{X^i\}_{0 \leq i \leq n}$ est libre dans l'ensemble des polynômes de degré $\leq n$.

Proposition 3.21 *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors les vecteurs colonnes de A forment une famille libre si et seulement si* $\operatorname{Ker}(A) = 0$.

Démonstration : Pour tout $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}$ dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, on a $X \in \operatorname{Ker}(A)$ ssi $AX = 0$ ssi $x_1 c_1(A) + \cdots + x_p c_p(A) = 0$. Donc $\operatorname{Ker}(A) = \{0\}$ ssi la seule combinaison linéaire de $c_1(A), \ldots, c_p(A)$ égale à 0 est celle où tous les coefficients sont nuls, autrement dit ssi les vecteurs colonnes $c_1(A), \ldots, c_p(A)$ sont indépendants.

■

Proposition 3.22 *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice échelonnée non nulle. Alors les colonnes pivotales de A forment une famille libre.*

Démonstration : Soit $1 \leq r \leq n$ le nombre de lignes non nulles de A. Pour $1 \leq i \leq r$, on note j_i l'indice de la colonne qui contient le premier terme non nul de la ligne i. Par le point 2. de la définition d'une matrice échelonnée, $j_1 < \cdots < j_r$. Pour $1 \leq i \leq r$, la colonne d'indice j_i est de la forme $c_{j_i}(A) = \begin{bmatrix} a_{1,j_i} \\ \vdots \\ a_{i,j_i} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ avec $a_{i,j_i} \neq 0$. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ tels que le vecteur colonne $X := \alpha_1 c_{j_1}(A) + \cdots + \alpha_r c_{j_r}(A)$ soit nul. La ligne r de X est $\alpha_r a_{r,j_r}$. Donc $\alpha_r = 0$. On montre de même (par récurrence) que $\alpha_{r-1} = \cdots = \alpha_1 = 0$. Donc la famille des colonnes pivotales est libre. ∎

3.2.4 Construction du noyau par les solutions spéciales

Proposition 3.23 *Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. Soit r le nombre de colonnes pivotales (ou de lignes non nulles) de la matrice totalement échelonnée à partir de A (c.à.d le rang de A) et J' l'ensemble des indices des colonnes non pivotales. Alors il existe $p - r$ vecteurs colonnes $S_j \in M_{1,p}(\mathbb{K})$, $j \in J'$ qui sont des éléments du noyau de A, et qu'on appelle "solutions spéciales" du système linéaire homogène $AX = 0$ tels que*
(1) tout élément de $\mathrm{Ker}(A)$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de la famille $(S_j)_{j \in J'}$,
(2) la famille $(S_j)_{j \in J'}$ est libre.

Démonstration : Il existe $E \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $R := EA$ soit totalement échelonnée. On a vu à la proposition 3.12 que $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(R)$.
Maintenant, on note r le nombre de colonnes pivotales (ou rang) de R et $J = (j_1, \ldots, j_r)$ les indices des colonnes pivotales, J' les indices des colonnes non pivotales. On note également $E_j \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ le vecteur colonne (qui a donc p lignes) dont tous les coefficients sont nuls sauf le $j^{ème}$ qui est égal à 1. On note enfin $R_{i,j}$ les coefficients de R.
Etape 1 - Construction de la famille des solutions spéciales $(S_j)_{j \in J'}$. On reproduit ici dans le cas général la construction effectuée dans les exemples 3.13, 3.14 et 3.16. Pour chaque colonne non pivotale $j \in J'$, on va construire une solution spéciale S_j du système linéaire homogène $AX = 0$. Soit donc $j \in J'$.

1. Considérons d'abord le cas où $j < j_1$; comme la matrice est totalement échelonnée, et que j_1 est la première colonne pivotale, la colonne $c_j(A)$ est donc nulle. En posant $S_j = E_j$, on obtient : $AS_j = c_j(A) = 0$.
2. Supposons maintenant que j est tel qu'il existe $1 \leq i \leq r-1$ tel que $j_i < j < j_{i+1}$; alors on sait que $c_j(R)$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des colonnes pivotales précédentes : $c_j(R) = R_{1,j} c_{j_1}(R) + \cdots + R_{i,j} c_{j_i}(R)$. On définit $S_j = -R_{1,j} E_{j_1} + \cdots - R_{i,j} E_{j_i} + E_j$. Alors
$$RS_j = -a_{1,j} c_{j_1}(R) - \cdots - a_{i,j} c_{j_i}(R) + c_j(R) = 0.$$
3. Enfin, si $j > j_r$, on définit $S_j = -R_{1,j} E_{j_1} - \cdots - R_{r,j} E_{j_r} + E_j$ et on vérifie de même que $RS_j = 0$.

Etape 2 - La famille des solutions spéciales $(S_j)_{j \in J'}$ est libre. Comme $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(R)$, la famille $(S_j)_{j \notin J}$ est une famille de vecteurs de $\mathrm{Ker}(A)$. Montrons que la famille $\{S_1, \ldots, S_p\}$ est libre. Soient $\alpha_j \in \mathbb{K}$, $j \in J'$ tels que
$$\sum_{j \in J'} \alpha_j S_j = 0.$$
Fixons $i \in J'$. La ligne i de S_i est 1 alors que pour tout $j \neq i$, la ligne i de S_j est 0. On obtient donc en calculant la ligne i dans l'égalité précédente que $\alpha_i = 0$. Comme cela est vrai pour tout i, on a bien montré que la famille $(S_i)_{i \in J'}$ est libre.

Etape 3 - La famille des solutions spéciales $(S_j)_{j \in J'}$ engendre $\mathrm{Ker}A$. Montrons que la famille $\{S_1, \ldots, S_p\}$ vérifie la condition (1). Soit $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. On va d'abord montrer qu'il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{K}$ tels que
$$X = \sum_{j \in J'} \alpha_j S_j + \sum_{j \in J} \alpha_j E_j \tag{3.2.2}$$

En effet, notons $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{p} x_j E_j$. Pour chaque $j \in J'$, S_j est de la forme $E_j + \sum_{l \in J} \beta_l E_l$. Donc il existe des nombres γ_j pour $j \in J$ tels que

$$\sum_{j \in J'} x_j S_j = \sum_{j \in J'} x_j E_j + \sum_{j \in J} \gamma_j E_j.$$

On en déduit que

$$X = \sum_{j=1}^{p} x_j E_j = \sum_{j \in J'} x_j E_j + \sum_{j \in J} x_j E_j = (\sum_{j \in J'} x_j S_j - \sum_{j \in J} \gamma_j E_j) + \sum_{j \in J} x_j E_j$$

ce qui prouve (3.2.2).
Si on suppose de plus que $X \in \operatorname{Ker}(A)$, alors (3.2.2) implique

$$0 = RX = \sum_{j \in J'} \alpha_j R S_j + \sum_{j \in J} \alpha_j R E_j = \sum_{j \in J} \alpha_j R E_j$$

puisqu'on a vu que les S_j étaient dans le noyau de R. Ainsi, $0 = \sum_{j \in J} \alpha_j c_j(R)$. Or les colonnes pivotales de R forment une famille libre, donc on a $\alpha_j = 0$ pour tout $j \in J$. En reportant dans (3.2.2), il vient

$$X = \sum_{j \in J'} \alpha_j S_j,$$

ce qui est exactement la condition (1).

■

3.2.5 Exercices

Résolution de systèmes linéaire homogènes et noyau

Exercice 74 (Solutions spéciales et noyau) *Pour les trois matrices suivantes,*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} B & B \end{bmatrix}$$

1. *Donner les colonnes pivotales et non pivotales*
2. *Donner les solutions spéciales du système linéaire homogène associé.*
3. *Donner le noyau de la matrice.*

Exercice 75 (Résolution de système) *Soit les matrices :*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Quelles sont les colonnes pivotales et les colonnes non pivotales ?
2. Déterminer des solutions spéciales de $A\boldsymbol{x} = 0$ en prenant 1 pour la variable libre et 0 pour toutes les autres variables libres.
3. Déterminer le noyau de A en l'écrivant comme l'ensemble des combinaisons linéaires de solutions spéciales puis en donnant les équations qui le définissent.

Exercice 76 (Résolution de systèmes homogènes) *Résoudre les systèmes linéaires suivants, en procédant de la même façon que dans l'exercice 75 :*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ 4x & - & y & & & = & 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & & & - & z & & & = & 0 \\ & & y & + & 2z & - & w & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 3z & - & w & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & y & + & z & & & = & 0 \\ & & y & & & + & w & = & 0 \\ 3x & - & 2y & + & 3z & + & w & = & 0 \\ & & -y & & & - & w & = & 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} a & - & b & + & 3c & + & d & - & e & = & 0 \\ 2a & - & b & + & c & + & d & + & e & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 77 (Noyau et matrice totalement échelonnée) *Construire la matrice totalement échelonnée R des matrices suivantes, donc on connaît les dimensions et le noyau.*

1. $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \mathrm{Ker}(A) = \{\boldsymbol{0}\}$
2. $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \mathrm{Ker}(A) = \{t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}\}$
3. $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \mathrm{Ker}(A) = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,; x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$
4. $A \in \mathcal{M}_{3,5}(\mathbb{R}), \mathrm{Ker}(A) = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \,; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0\}$
5. $A \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R}), \mathrm{Ker}(A) = \{\lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$

Exercice 78 (Construction de matrices) *Construire une matrice dont le noyau contient le vecteur de composantes $(1, 2, 0)$ et l'image les vecteurs de composantes $(1, 0, 1)$ et $(0, 0, 1)$*

Exercice 79 (Noyau et image)
1. Construire une matrice A carrée d'ordre 2 dont le noyau est égal à son image.
2. Peut-on construire une matrice A carrée d'ordre 3 dont le noyau est égal à son image ?

3.3 Résolution d'un système linéaire général

Soit le système linéaire à n équations et p inconnues :

$$\left\{\begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \cdots \\ a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \ldots + a_{i,p}x_p = b_i \\ \cdots \\ \cdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,p}x_p = b_n \end{array}\right.$$

On met le système sous forme matricielle : $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, avec $A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,p} \\ \cdots & & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,p} \end{bmatrix}$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Rappelons que résoudre $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ revient également à demander que $\boldsymbol{b}$ soit une combinaison linéaire des colonnes de A ; en effet, le produit $A\boldsymbol{x}$ s'écrit aussi $\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{c}_1(A) + x_2\boldsymbol{c}_2(A) + \cdots + x_p\boldsymbol{c}_p(A)$ où $\boldsymbol{c}_i(A)$ désigne la i-ème colonne de A.

Donc le système $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ admet une solution si et seulement si le second membre $\boldsymbol{b}$ est dans $\mathrm{Im}(A)$.

Exemple 3.24 *Soit* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. *Alors* $A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Donc $\mathrm{Im}(A)$ *est un plan dans* $\mathbb{R}^3$*. Pour un* $\boldsymbol{b}$ *quelconque, il n'y pas de raison qu'il y ait une solution au système* $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$*, sauf si* $\boldsymbol{b}$ *est dans le plan* $\mathrm{Im}(A)$*. Par contre si* $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$*, alors il y a une solution, car* $\boldsymbol{0} \in \mathrm{Im}(A)$ *car (rappel)* $A\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$*. On rappelle d'ailleurs en passant que* $\mathrm{Im}(A)$ *est un sous-espace vectoriel et à ce titre, doit contenir le vecteur nul.*

ATTENTION : ne pas confondre $\mathrm{Im}(A)$ avec l'ensemble des solutions de $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, $\mathrm{Im}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, alors que l'ensemble des solutions de $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ est un sous ensemble de $\mathbb{R}^p$ qui n'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$ que si $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$.
L'étude du noyau de la matrice nous permet d'énoncer le résultat suivant :

Proposition 3.25 (Solutions du système général $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$) *Soit* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ *une matrice réelle à* n *lignes et* p *colonnes. Soit* $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$*. Alors :*

1. *Si* $\boldsymbol{b} \in \mathrm{Im}(A)$*, le système linéaire admet au moins une solution.*
2. *Si* $\boldsymbol{b} \notin \mathrm{Im}(A)$*, le système linéaire n'admet aucune solution.*
3. *Si* $\mathrm{Ker}(A) = \{\boldsymbol{0}\}$*, toutes les colonnes sont pivotales,* $r = p$ *et le système linéaire admet au plus une solution.*
4. *Si* $\boldsymbol{b} \in \mathrm{Im}(A)$ *et* $\mathrm{Ker}(A) = \{\boldsymbol{0}\}$*, toutes les colonnes sont pivotales,* $r = p$ *et le système linéaire admet une solution unique.*
5. *Si* $\boldsymbol{b} \in \mathrm{Im}(A)$ *et* $\mathrm{Ker}(A) \neq \{\boldsymbol{0}\}$*, le système linéaire admet une infinité de solutions.*

Démonstration : Dire qu'il existe $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^p$ tel que $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ est équivalent à dire que $\boldsymbol{b}$ est une combinaison linéaire des colonnes de A, et donc que $\boldsymbol{b} \in C(A)$ ou $\boldsymbol{b} \in \mathrm{Im}(A)$. Ceci démontre les points 1 et 2.
Supposons que $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ sont des solutions de $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Alors $A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$, c.à.d. $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \in \mathrm{Ker}(A)$ On en déduit le point 3.
Le point 4 découle des points 1 et 3.
Supposons maintenant que $\boldsymbol{b} \in \mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{Ker}(A) \neq \{\boldsymbol{0}\}$. Donc par le point 1, il existe $\boldsymbol{x}_\mathrm{p}$ qu'on va appeler solution particulière, telle que $A\boldsymbol{x}_\mathrm{p} = \boldsymbol{b}$. Par hypothèse, il existe $\boldsymbol{x}_\mathrm{n} \neq \boldsymbol{0}$ tel que $A\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{0}$. Il est alors facile de voir que $\boldsymbol{x}_\mathrm{p} + s\boldsymbol{x}_\mathrm{n}$ est solution de $A\boldsymbol{x} = b$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.

■

Pour résoudre pratiquement le système $A\boldsymbol{x} = b$ dans le cas général, on va procéder comme dans le cas où A était inversible, c.à.d. par élimination (ou échelonnement), grâce au résultat suivant :

Proposition 3.26 *Soit* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$*,* $E \in GL_n(\mathbb{K})$ *et* $b \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *(c.à.d.* $\mathbb{R}^n$ *dans le cas* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$*). Alors* $\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ *(c.à.d.* $\mathbb{R}^p$ *dans le cas* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$*)est solution du système linéaire* $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *si et seulement si* $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ *est solution du système linéaire* $EA\boldsymbol{x} = E\boldsymbol{b}$*.*

Le plan d'action pour résoudre pratiquement le système $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ est le suivant : est échelonner totalement la matrice augmentée $\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$. La forme totalement échelonnée de la matrice augmentée $\begin{bmatrix} R & \boldsymbol{c} \end{bmatrix}$ nous permet de vérifier si le second membre est dans l'image. Si c'est le cas, elle nous permet de construire une solution particulière $\boldsymbol{x}_\mathrm{p} \in \mathbb{R}^p$ telle que $R\boldsymbol{x}_\mathrm{p} = \boldsymbol{c}$, ce qui est équivalent (par la proposition 3.26) à $A\boldsymbol{x}_\mathrm{p} = \boldsymbol{b}$.
Ensuite, la forme totalement échelonnée de la matrice R nous permet de construire les solutions spéciales et donc tout le noyau, comme on l'a vu au paragraphe précédent.
On ainsi construit l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions du système :

$$\mathcal{S} = \{\boldsymbol{x}_\mathrm{p} + \boldsymbol{x}_\mathrm{n}, \boldsymbol{x}_\mathrm{n} \in \mathrm{Ker}(A)\} = \{\boldsymbol{x}_\mathrm{p} + \sum_{k=1}^{p-r} \alpha_k \boldsymbol{s}_k\},$$

où les vecteurs $\boldsymbol{s}_k$ sont les solutions spéciales du système homogène $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ construites au paragraphe précédent.
Nous allons maintenant étudier quelques exemples pour voir comment ça marche en pratique.

3.3.1 Exemples de résolution de systèmes

Exemple 3.27

$$\left\{ \begin{array}{c} 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 5 \\ 7x_1 + 7x_2 + x_3 = 10 \\ 5x_1 + 5x_2 - x_3 = 5 \end{array} \right.$$

On a ici $n = p = 3$, et la matrice du système est donc $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 7 & 7 & 1 \\ 5 & 5 & -1 \end{bmatrix}$.

La matrice augmentée est : $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 & 5 \\ 7 & 7 & 1 & 10 \\ 5 & 5 & -1 & 5 \end{bmatrix}$, et sa forme totalement échelonnée (exo) : $\tilde{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
La dernière ligne de A demande 0 = 1 : on "lit" dans cette dernière ligne de la matrice que le vecteur $\boldsymbol{b}$ n'est pas dans l'image de A, et que le système n'admet pas de solution.

Dans le cas où $\boldsymbol{b}$ est dans l'image de A, on sait qu'on a au moins une solution au système linéaire. Pour trouver les solutions d'un système linéaire $AX = \boldsymbol{b}$, l'idée est de chercher une solution particulière $\boldsymbol{x}_{\mathrm{p}}$ par l'algorithme d'échelonnement total. Une fois cette solution calculée, on remarque ensuite que si on a une autre solution $\boldsymbol{b}$ du même système $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, alors $A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\mathrm{p}}) = A\boldsymbol{x} - A\boldsymbol{x}_{\mathrm{p}} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = 0$. La différence $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\mathrm{p}}$ est donc dans le noyau de A.
On obtient donc toutes les solutions du système linéaire $Absbx = \boldsymbol{b}$ sous la forme $\boldsymbol{x}_{\mathrm{p}} + \boldsymbol{x}_{\mathrm{n}}$, $\boldsymbol{x}_{\mathrm{n}} \in \mathrm{Ker}(A)$. En particulier, il existe une unique solution lorsque $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$ (et $\boldsymbol{b} \in \mathrm{Im}(A)$).
Trouver une solution particulière $\boldsymbol{x}_{\mathrm{p}}$ du système $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ est facile à partir de sa forme totalement échelonnée : on met toutes les variables correspondant aux colonnes non pivotales à 0, et on résout (si c'est possible) le système des variables pivotales : on obtient ainsi une solution particulière $\boldsymbol{x}_{\mathrm{p}}$.
Soit $\tilde{A}$ la matrice augmentée du système, d'ordre $n \times (p+1)$ (n lignes, $p+1$ colonnes), définie par

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} & b_2 \\ \dots & & & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} & b_n \end{bmatrix}$$

On effectue l'algorithme d'échelonnement total sur la matrice $\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$ pour arriver à la forme totalement échelonnée $\tilde{R} = \begin{bmatrix} R & \boldsymbol{d} \end{bmatrix}$.
Examinons les différents cas possibles selon les valeurs de n, p et r, où r est le rang de la matrice A (le nombre de lignes non nulles de R et donc aussi de colonnes pivotales) .

1. **Cas d'une matrice carrée :** $n = p$**, avec** $R = \mathrm{Id}_n$, i.e. $r = n$, alors la matrice A est inversible et le système admet une solution unique $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$.

   Exemple

   $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ 3x_1 + 7x_2 = 13 \end{cases}$$

   Forme matricielle : $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ avec $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ et $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 13 \end{bmatrix}$. Matrice augmentée : $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 13 \end{bmatrix}$.
   Forme totalement échelonnée (exo) : $\tilde{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

   On a donc $R = \mathrm{Id}_n$ (R est la forme totalement échelonnée de A, $\tilde{R}$ est la forme totalement échelonnée de $\tilde{A}$) et on "lit" donc une solution $\boldsymbol{x}_{\mathrm{p}}$ du système dans la matrice $\tilde{R}$ qui représente le système linéaire :

   $$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

   Remarquons que la matrice est inversible et que son noyau est réduit à $\{\mathbf{0}\}$. La solution unique du système est donc $X = \boldsymbol{x}_{\mathrm{p}} + \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

2. **Cas d'une matrice carrée telle que** $R \neq \mathrm{Id}_n$**,** $r < n$ alors R a au moins une ligne nulle. Si toutes les composantes de $\boldsymbol{d}$ correspondantes aux lignes nulles de R sont nulles, les équations sont compatibles et le système admet une infinité de solutions (parce que le noyau de A n'est pas réduit à $\{\mathbf{0}\}$). S'il existe une composante de $\boldsymbol{d}$ non nulle et qui correspond à une ligne nulle de R, alors le système n'a pas de solution (parce que $\boldsymbol{d} \notin \mathrm{Im}(A)$).

Exemple

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = b_1 \\ x_1 + x_3 = b_2 \\ x_3 = b_3 \end{cases}$$

Le système s'écrit sous forme matricielle $AX = \boldsymbol{b}$, avec $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$. La matrice augmentée du système s'écrit $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & b_1 \\ 1 & 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \end{bmatrix}$. L'algorithme d'échelonnement total donne :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & b_1 \\ 1 & 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{T_{21}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & -1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{T_{32}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & -1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 + b_2 - b_1 \end{bmatrix}.$$

A ce stade, on a effectué seulement l'échelonnement de la matrice. En écrivant l'équation donnéee par la dernière ligne de la matrice augmentée : $(0\ 0\ 0\ b_3 + b_2 - b_1)$, on voit déjà que pour espérer avoir une solution, il faut que $\boldsymbol{b}$ satisfasse la condition de compatibilité $0 = b_3 + b_2 - b_1$.

(a) Si $\boldsymbol{b}$ ne satisfait pas cette condition, alors $\boldsymbol{b}$ n'est pas dans $\mathrm{Im}(A)$ et le système linéaire **n'admet pas de solution**.

(b) Si maintenant $\boldsymbol{b}$ satisfait la condition de compatibilité $0 = b_3 + b_2 - b_1$ ($\boldsymbol{b}$ est dans $\mathrm{Im}(A)$), on continue la procédure d'échelonnement total pour calculer la solution du système :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & -1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 + b_2 - b_1 \end{bmatrix} \xrightarrow{D_2(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 + b_2 - b_1 \end{bmatrix} \xrightarrow{T_{12}(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 1 & b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 + b_2 - b_1 \end{bmatrix}$$

On "lit" alors une solution dans les deux premières lignes de la matrice totalement échelonnée qu'on a ainsi obtenue : $x_1 = 2b_2 - b_1$, $x_3 = b_1 - b_2$. Notons que l'on peut choisir x_2 de manière arbitraire. Si on choisit $x_2 = 0$, on obtient une solution particulière $\boldsymbol{x}_\mathrm{p} = \begin{bmatrix} 2b_2 - b_1 \\ 0 \\ b_1 - b_2 \end{bmatrix}$ du système $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, à laquelle on peut ajouter n'importe quel élément $\boldsymbol{x}_\mathrm{n}$ de $\mathrm{Ker}(A)$. On détermine alors la solution spéciale du système homogène (c'est-à-dire avec second membre nul) en remarquant qu'il n'y a qu'une seule colonne non pivotale, la deuxième, et on peut écrire la combinaison linéaire $0\boldsymbol{c}_1(R) + \boldsymbol{c}_2(R) + 0\boldsymbol{c}_3(R) = 0$. Une solution spéciale est donc $\boldsymbol{s} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Le système admet une infinité de solutions, qui sont de la forme :

$$\boldsymbol{x}_\mathrm{p} + \lambda \boldsymbol{s} = \begin{bmatrix} 2b_2 - b_1 \\ \lambda \\ b_1 - b_2 \end{bmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exemple Résoudre le système :

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 5 \\ 7x_1 + 7x_2 + x_3 = 10 \\ 5x_1 + 5x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

On a ici $n = p = 3$, et la matrice augmentée du système est $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 & 5 \\ 7 & 7 & 1 & 10 \\ 5 & 5 & -1 & 5 \end{bmatrix}$, et sa forme totalement échelonée (exo) : $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. On "lit" alors dans la forme totalement échelonnée que le second membre n'est pas dans l'image de A (parce que la dernière ligne donne $0 = 1$) donc le système n'a pas de solution.

Remarquons que les solutions du système $AX = \mathbf{0}$ se trouvent en remarquant que la matrice R totalement échelonnée de A (les 3 premières colonnes de $\tilde{R}$) a 2 colonnes pivotales et une non pivotale, la seconde. On remarque que $c_2(R) = c_1(R)$ (la seconde colonne est identique à la première) ce qui donne comme solution spéciale $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Les solutions de $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ sont les multiples de cette solution spéciale.

$$\mathrm{Ker}(A) = \left\{ \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. **Cas** $n > p$ **et** $r = p$**.** On a dans ce cas une matrice rectangulaire "debout", plus haute que large, et aucune ligne nulle. Donc on n'a aucune colonne non pivotale (puisque $r = p$). Le noyau de la matrice est réduit à $\{\mathbf{0}\}$. Prenons un exemple :
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ et } \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$
Cherchons pour quel $\boldsymbol{b}$ le système $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ admet une solution. L'échelonnement total de la matrice augmentée s'écrit :
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & b_1 \\ 1 & 0 & b_2 \\ 2 & 3 & b_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{T_{21}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & b_1 \\ 0 & -1 & b_2 - b_1 \\ 2 & 3 & b_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{T_{31}(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & b_1 \\ 0 & -1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 1 & b_3 - 2b_1 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{T_{32}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & b_1 \\ 0 & -1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & b_3 - 3b_1 + b_2 \end{bmatrix} \xrightarrow{T_{12}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & b_2 \\ 0 & -1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & b_3 - 3b_1 + b_2 \end{bmatrix} \xrightarrow{D_2(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & b_2 \\ 0 & 1 & b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & b_3 - 3b_1 + b_2 \end{bmatrix}$$
La lecture de la forme totalement échelonnée donne que :
   (a) Les deux colonnes sont pivotales, donc le noyau de la matrice est réduit à $\{\mathbf{0}\}$.
   (b) Le second membre $\boldsymbol{b}$ est dans l'image de A si l'équation de compatibilité $b_3 - 3b_1 + b_2 = 0$ est vérifiée.
   (c) Si $\boldsymbol{b} \in \mathrm{I}m(A)$ alors il y a une unique solution $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} b_2 \\ b_1 - b_2 \end{bmatrix}$.
4. **Cas** $n < p$ **et** $r = n$**.** Il s'agit d'une matrice plus large que haute "rectangulaire couchée", dont toutes les lignes sont non nulles. Il y a donc forcément des colonnes non pivotales, et le noyau de la matrice n'est donc pas réduit à $\mathbf{0}$. Comme il n'y a pas d'équation de compatibilité, le second membre est dans l'image de A, et on a donc une infinité de solutions, de la forme $\boldsymbol{x}_\mathrm{p} + \boldsymbol{x}_\mathrm{n}$, $\boldsymbol{x}_\mathrm{n} \in \mathrm{Ker}(A)$.

Exemple Résoudre le système :
$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$
La matrice augmentée du système est alors : $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$. L'échelonnement total donne $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.
On lit alors dans la matrice totalement échelonnée :
   (a) Une solution particulière du système est donné par le second membre (l'inconnue arbitraire est x_3, qu'on prend égale à 0) : $\boldsymbol{x}_\mathrm{p} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.
   (b) Le noyau de la matrice du système s'obtient en remarquant que la troisième colonne est non pivotale et égale à la première. On a donc comme solution spéciale du système homogène $S = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(c) On a donc une infinité de solutions, qui sont de la forme

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_{\mathrm{p}} + \lambda \boldsymbol{s} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

En résumé, il y a quatre possiblités pour les solutions d'un système linéaire, selon le rang r de la matrice :

$r = n$	et	$r = p$	matrice carrée inversible	$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ a une solution unique
$r = n$	et	$r < p$	matrice rectangulaire "couchée"	$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ a une infinité de solutions
$r < n$	et	$r = p$	matrice rectangulaire "debout"	$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ a 0 ou 1 solution (unique)
$r < n$	et	$r < p$	matrice quelconque	$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ a 0 ou une infinité de solutions

3.3.2 Caractérisation d'une matrice inversible

Lemme 3.28 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice totalement échelonnée telle que $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$. Alors $A = \mathrm{Id}_n$.*

Démonstration : Par la proposition 3.23, A n'a pas de colonne non pivotale. Donc l'ensemble des indices J des colonnes pivotales est $J = (1, \ldots, n)$ (autrement dit, $j_i = i$ pour tout i). De plus, on a (voir (3.2.1)) $c_j(A) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

où le 1 est sur la j ème ligne. Donc $A = \mathrm{Id}_n$. ■

Corollaire 3.29 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a équivalence des propriétés suivantes*

1. *A est inversible.*
2. $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$.
3. $\mathrm{Im}(A) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *(= $\mathbb{R}^n$ dans le cas de matrices réelles).*

Démonstration : Supposons A inversible. Montrons que $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$. Soit $X \in \mathrm{Ker}(A)$. Alors $AX = 0$, donc $A^{-1}AX = 0$, d'où $X = 0$.
Montrons qu'on a aussi $\mathrm{Im}(A) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Notons B l'inverse de A. Soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors $Y = A(BY)$ ce qui montre que $Y \in \mathrm{Im}(A)$. Donc $\mathrm{Im}(A) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
Supposons maintenant que $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$ et montrons que A est inversible. Soit $E \in GL_n(K)$ telle que EA soit totalement échelonnée. Comme $\mathrm{Ker}(E) = \{0\}$ (car E est inversible), on a $\mathrm{Ker}(EA) = \mathrm{Ker}(A) = \{0\}$. On en déduit par le Lemme 3.28 que $EA = \mathrm{Id}_n$, donc $A = E^{-1}EA = E^{-1}$ est inversible.
Supposons enfin que $\mathrm{Im}(A) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et montrons que A est inversible. Soit $E \in GL_n(K)$ telle que EA soit totalement échelonnée. Comme $\mathrm{Im}(E) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (car E est inversible), on a $\mathrm{Im}(EA) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Donc EA n'a pas de lignes nulles ; autrement dit, les n lignes de EA ont un premier coefficient non nul. On en déduit, en notant comme toujours $j_1 < \cdots < j_n$ les indices des colonnes pivotales, que $j_1 = 1, \ldots, j_n = n$ (car il y a exactement n lignes non nulles et n colonnes dans la matrice). Comme EA est totalement échelonnée, $c_j(EA) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ où le 1 est sur la j ème ligne (voir (3.2.1)). Donc $EA = \mathrm{Id}_n$, ce qui montre que A est inversible.

■

On déduit des deux précédents corollaires qu'**une matrice carrée est inversible si et seulement si elle admet une forme totalement échelonnée égale à l'identité.**

Corollaire 3.30 *Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Alors A peut s'écrire comme le produit de matrices élémentaires.*

Démonstration : L'algorithme d'échelonnement total (Théorème 2.34) montre qu'il existe P produit de matrices élémentaires telle que PA soit totalement échelonnée. Comme PA est inversible, on en déduit $PA = \mathrm{Id}_n$ par le Corollaire 3.28. Donc $A = P^{-1}$. On conclut par le corollaire 2.20. ■

3.3.3 Exercices

Exercice 80 (Ecrire une matrice et résoudre un système) *Ecrire sous forme matricielle le probléme suivant Trouver deux quadruplets différents de 4 entiers a, b, c et d tels que :*

La moyenne de a et b est 35,
la moyenne de b et c est -22,
la moyenne de c et d est -39,
et la moyenne de a et d est 18.

Exercice 81 *Calculer le rang des matrices*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 8 & 2 \end{bmatrix} \quad et \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Exercice 82 *Calculer le rang des matrices*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice 83 (Suite de l'exercice 75) *Soit la matrice :* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) *Quel est le rang de la matrice A ?*
(b) *Soit $b \in \mathbb{R}^4$. Résoudre le système linéaire $Ax = b$.*

Exercice 84 *Calculer, pour tout $t \in \mathbb{R}$ le rang des matrices* $M_t = \begin{bmatrix} 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \end{bmatrix}$ *et* $N_t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Exercice 85 (Ligne Attila) *Si une matrice totalement échelonnée a toute sa première ligne remplie de 1, quel est son rang ?*

Exercice 86 *Soit* $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ *et* $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

1. Echelonner la matrice augmentée $\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$ pour la transformer en $\begin{bmatrix} U & \boldsymbol{c} \end{bmatrix}$ où U est échelonnée.

2. Trouver les conditions sur b_1, b_2 et b_3 pour que $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ait une solution.

3. Décrire $\mathrm{Im}A$ (plan ? droite ? tout l'espace ?)

4. Décrire $\mathrm{Ker}A$. Trouver les solutions spéciales de $A\boldsymbol{x} = 0$.

5. Trouver une solution particulière au système $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} = (4, 3, 5)$.

6. Trouver la forme totalement échelonnée $\begin{bmatrix} R & \boldsymbol{d} \end{bmatrix}$ et y lire directement les solutions spéciales et particulière.

Exercice 87 *Résoudre les systèmes linéaires suivants :*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & - & z & = & 1 \\ 4x & - & y & & & = & 3 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & & & - & z & & & = & 1 \\ & & y & + & 2z & - & w & = & 3 \\ x & + & 2y & + & 3z & - & w & = & 7 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & y & + & z & & & = & 1 \\ & & y & & & + & w & = & 2 \\ 3x & - & 2y & + & 3z & + & w & = & 3 \\ & & -y & & & - & w & = & 4 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} a & - & b & + & 3c & + & d & - & e & = & 1 \\ 2a & - & b & + & c & + & d & + & e & = & 3 \end{array}\right.$$

Exercice 88 (Solution spéciale et forme totalement échelonnée) *Soit $A \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$ telle que le vecteur $\boldsymbol{s} = (3,2,1,0)$ soit la seule solution spéciale du système linéaire homogène $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.*

1. Quel est le rang de la matrice A ?

2. Quelle est la forme totalement échelonnée de A ?

3. Existe-t-il une solution au système $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ pour tout $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$?

Exercice 89 (Même ensemble de solutions même matrice ?) *Soient A et B des matrices telles que que les systm̀es $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ et $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ont le même ensemble de solutions pour tout $\boldsymbol{b}$. Est ce que $A = B$?*

Chapitre 4

Bases, dimension et sous-espaces

On va s'intéresser ici à la dimension des espaces et sous espaces et les relations entre certains sous espaces. Vous avez déjà une idée assez claire de ce qu'on entend par 2d ou 3d (ne serait-ce que par les jeux vidéo !) : en 2d, on est dans un plan, en 3d, on est dans l'espace. On va relier cette notion de dimension à celle de vecteurs libres et liés (ou linéairement indépendants et linéairement dépendants). En gros, si on a des vecteurs libres d'un espace vectoriel, cela veut dire qu'il n'y en a pas en trop, si on a des vecteurs liés, cela veut dire qu'il y en a assez. Pas en trop ou assez pour quoi ? Pour former ce qu'on appelle une base, qui a exactement le "bon nombre" de vecteurs, et ce bon nombre est la dimension de l'espace. Vous connaissez d'ailleurs bien la base $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ de $\mathbb{R}^3$: trois vecteurs de base pour un espace de dimension 3.

4.1 Bases et dimension

4.1.1 Familles libres, liées, génératrices, bases

On a déjà vu au chapitre précédent que des vecteurs, ou éléments d'un espace vectoriel E, sont dits linéairement indépendants si la seule combinaison linéaire de ces vecteurs égale à $\mathbf{0}_E$ (le vecteur nul de l'espace vectoriel) est la combinaison linéaire dont tous les coefficients sont nuls. Une autre manière équivalente de le dire : aucun des vecteurs ne peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres vecteurs.
En particulier, les vecteurs colonnes d'une matrice A sont linéairement indépendants si la seule solution du système $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ est $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, c.à.d. si le noyau de la matrice est réduit à $\{\mathbf{0}\}$, qui est ici le vecteur nul de $\mathbb{R}^p$, si A est une matrice $n \times p$. Il n'y a aucune autre combinaison linéaire des colonnes qui donne le vecteur nul. Sinon, ils sont linéairement dépendants.

Définition 4.1 (Indépendance et dépendance linéaire) *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $(\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n)$ une famille d'éléments de E.*

1. *On dit que la famille $(\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n)$ est* **libre***, ou que les vecteurs $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ sont linéairement indépendants, si $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ et $\alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{e}_n = 0$ entraîne $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.*
2. *On dit que la famille $(\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n)$ est* **liée** *si elle n'est pas libre, ou que les vecteurs $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ sont linéairement dépendants s'ils ne sont pas linéairement indépendants.*

Si on prend trois vecteurs dans $\mathbb{R}^2$, ils sont forcément dépendants.
De manière générale, si $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v} \in E$, la famille $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ est liée si, et seulement si, $\boldsymbol{u} = 0$ ou $\boldsymbol{v} = 0$, ou il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{u}$: on dit aussi que $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont colinéaires.
Si maintenant on prend trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$, et si l'un d'entre eux est multiple d'un autre, alors ils sont dépendants. Mais s'ils sont coplanaires, ils sont aussi dépendants, parce qu'on peut écrire l'un d'entre eux comme combinaison linéaire des deux autres.
Si on prend trois vecteurs non coplanaires, la seule combinaison linéaire de ces trois vecteurs qui donne 0 est la combinaison nulle, et donc ils sont libres.
Pour voir si une famille de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est libre ou liée, on met chacun des vecteurs comme colonne d'une matrice $n \times p$, et on cherche le noyau de A, ou, de manière équivalente, on cherche à résoudre le système $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. On a vu cela en détails au paragraphe 3.2.

Dans le chapitre précédent, on a vu également que les colonnes pivotales d'une matrice échelonnée sont linéairement indépendantes. Donc les colonnes d'une matrice échelonnée qui n'a que des colonnes pivotales sont linéairement indépendantes. On va voir dans la suite de ce chapitre que ce résultat reste vrai pour toutes les matrices : les colonnes d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont linéairement indépendantes lorsque toutes les colonnes d'une matrice échelonnée à partir de A sont pivotales, autrement dit lorsque $p = r$, (r étant le rang de la matrice, c'est-à-dire le nombre de colonnes pivotales ou encore le nombre de lignes non nulles).
Dans le cas où $p > n$, alors forcément les vecteurs sont linéairement dépendants. En effet, dans ce cas le rang de la matrice r, i.e. le nombre de lignes non nulles, est forcément inférieur strictement à p, puisque $r \leq n < p$. Donc il existe des colonnes non pivotales qui permettent de définir les solutions spéciales associées du système $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. En particulier, le noyau de A n'est pas réduit à $\{\mathbf{0}\}$ et il existe une combinaison linéaire des colonnes qui donne $\mathbf{0}$. La famille est liée.

Définition 4.2 (Famille génératrice) *On dit que la famille $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ est* **génératrice** *si Vect$(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) = E$. Ceci revient à dire que pour tout $\boldsymbol{x} \in E$, il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que*

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{e}_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \boldsymbol{e}_k.$$

On a vu au chapitre précédent que les colonnes d'une matrice A engendrent l'espace des colonnes de A (c'est la définition de $C(A)$), et donc engendrent l'image de A (car $\mathrm{Im}(A) = C(A)$).
On définit maintenant un nouvel espace associé à la matrice A, qui est l'espace des lignes de la matrice A.

Définition 4.3 (Espace des lignes d'une matrice) *Soit une matrice A d'ordre $n \times p$. On appelle espace des lignes de $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, noté $L(A)$, le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ engendré par les vecteurs lignes de A.*

$$L(A) = \mathrm{Vect}\{\ell_1(A), \ldots \ell_p(A)\},$$

où $\ell_i(A)$ représente la i-ème ligne de la matrice A.
Il est facile de voir que $L(A) = C(A^t)$.

Attention, l'ensemble $C(A)$ ($= \mathrm{Im}(A)$) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, alors que l'ensemble $L(A)$ ($= C(A^t) = \mathrm{Im}(A^t)$) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$.

Exemple 4.4 (Espace des colonnes et espace des lignes) *Cherchons $C(A)$ et $L(A)$ pour la matrice $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ définie par $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. La matrice transposée de A est donc $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. L'espace $C(A) = \mathrm{Im}(A) = L(A^t)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ qui est engendré par les colonnes de A, c.à.d. les vecteurs $(1, 0, 0)$ et $(0, 1, 0)$. C'est un plan de $\mathbb{R}^3$.*
L'espace $L(A) = C(A^t) = \mathrm{Im}(A^t)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ qui est engendré par les lignes de A, c.à.d. les vecteurs $(1, 0)$, $(0, 1)$ et $(0, 0)$. C'est $\mathbb{R}^2$ tout entier.

Les familles génératrices sont utiles pour décrire un espace vectoriel comme l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de cette famille. Par exemple, le plan horizontal dans $\mathbb{R}^3$ est engendré par la famille $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$. En fait, il est aussi engendré par la famille $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0)\}$; et aussi par la famille $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0), (2, 6, 0)\}$... d'où la question naturelle : peut-on trouver des familles génératrices les plus petites possibles ? On aura alors le “bon nombre” de vecteurs qui permettent d'obtenir tous les vecteurs de l'espace par combinaison linéaire. Pour cet exemple, on se convainc facilement qu'on a besoin au minimum de 2 vecteurs pour engendrer le plan horizontal. Pour traiter le cas général, on utilise la notion suivante.

Définition 4.5 (Base) *On dit que la famille $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ est une* **base** *si elle libre* **et** *génératrice.*

Exemple 4.6 (Base canonique de $\mathbb{R}^n$) *Les vecteurs $\boldsymbol{i} = (1, 0)$ et $\boldsymbol{j} = (0, 1)$ forment une base de $\mathbb{R}^2$. De même, les vecteurs $\boldsymbol{i} = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{j} = (0, 1, 0)$ et $\boldsymbol{k} = (0, 0, 1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Plus géneralement, on appelle base canonique de $\mathbb{R}^n$ la famille de vecteurs $(\boldsymbol{e}_i)_{i=1,\ldots,n}$, avec $\boldsymbol{e}_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, où le 1 est placé en i-ème position. Les vecteurs de la base canonique sont les vecteurs colonnes de la matrice identité Id_n.*

La base canonique est une base de $\mathbb{R}^n$, mais ce n'est pas la seule ! En fait, on peut observer que

Exemple 4.7 (Base de $\mathbb{R}^n$ et matrice inversible) *Les colonnes d'une matrice $n \times n$ forment une base de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si la matrice est inversible (exercice : voir corollaire 3.29). On voit donc que $\mathbb{R}^n$ a un nombre de bases infini.*

Exemple 4.8 (Base de $\mathrm{Ker}(A)$) *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. La proposition 3.23 dit exactement que les solutions spéciales de $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ forment une famille libre et génératrice de l'espace des solutions de $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Les solutions spéciales sont donc une base de $\mathrm{Ker}A$. Comptons le nombre de vecteurs dans cette base ; soit r le rang de la matrice, c.à.d. le nombre de lignes non nulles de la matrice R totalement échelonnée à partir de A. Le rang r est aussi le nombre de colonnes pivotales de R. On a donc donc $p - r$ colonnes non pivotales, $p - r$ solutions spéciales, $p - r$ vecteurs de base pour $Ker(A)$.*

Dans le cas d'une matrice échelonnée, ce sont les colonnes pivotales de la matrice qui forment une base de $C(A)$:

Proposition 4.9 *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice échelonnée. Alors les colonnes pivotales de A forment une base de $\mathrm{Im}(A)$.*

Démonstration : On se souvient (proposition 3.22) que les colonnes pivotales $c_{j_1}(A), \ldots, c_{j_r}(A)$ forment une famille libre. De plus (proposition 3.15), les colonnes non pivotales sont soit nulles soit combinaison linéaire des colonnes pivotales. Donc toutes les colonnes appartiennent à $\mathrm{Vect}(c_{j_1}(A), \ldots, c_{j_r}(A))$. Donc l'espace des colonnes est égal à $\mathrm{Vect}(c_{j_1}(A), \ldots, c_{j_r}(A))$. Autrement dit, $\{c_{j_1}(A), \ldots, c_{j_r}(A)\}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(A)$. En résumé, c'est une base de $\mathrm{Im}(A)$. ■

En fait, cette propriété est "conservée" par échelonnement, c.à.d. que les colonnes de la matrice A dont les indices sont ceux des colonnes pivotales de sa forme échelonnée forment également une base de $C(A)$ ou $\mathrm{Im}(A)$. On démontre ce résultat grâce au petit lemme suivant, qu'on va d'ailleurs utiliser plusieurs fois par la suite.

Lemme 4.10 *Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq p$. Si $(c_{i_1}(A), \ldots, c_{i_k}(A))$ est une famille libre, resp. génératrice, resp. une base de $\mathrm{Im}(A)$, alors $(c_{i_1}(PA), \ldots, c_{i_k}(PA))$ est une famille libre, resp. génératrice, resp. une base de $\mathrm{Im}(PA)$.*

Démonstration : Il suffit de remarquer que $c_i(PA) = Pc_i(A)$ puis d'appliquer les définitions de famille libre, génératrice, base. ■

Proposition 4.11 *Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que PA soit échelonnée. Notons $1 \leq i_1 < \cdots < i_r$ les indices des colonnes pivotales de PA. Alors $(c_{i_1}(A), \ldots, c_{i_r}(A))$ est une base de $\mathrm{Im}(A)$.*

Démonstration : Par le lemme 4.10, il suffit d'observer que $(c_{i_1}(PA), \ldots, c_{i_r}(PA))$ est une base de $\mathrm{Im}(PA)$, ce qui est le cas puisque dans une matrice échelonnée, les colonnes pivotales forment une base de l'espace des colonnes. ■

L'intérêt principal de trouver une base d'un espace vectoriel est que l'on peut décrire précisément tout élément de l'espace vectoriel grâce à la base. On écrit le vecteur comme combinaison linéaire des vecteurs de la base. Cette combinaison linéaire donne les composantes du vecteur dans la base, de manière unique, comme on le montre maintenant.

Proposition 4.12 (Composantes d'un vecteur dans une base) *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ une base de E. Pour tout $x \in E$, il existe un unique $n-$uplet $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ appelé les* **composantes de x dans la base** *$\mathcal{B}$ tel que*

$$x = \alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{e}_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \boldsymbol{e}_k.$$

Démonstration : L'existence des composantes x_i provient du caractère générateur de la famille. L'unicité du caractère libre. Plus précisément :
La famille $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ étant une base, elle est génératrice. Par conséquent pour tout $x \in E$, il existe un $n-$uplet $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$x = \alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{e}_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \boldsymbol{e}_k.$$

Soit $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$x = \beta_1 \boldsymbol{e}_1 + \cdots + \beta_n \boldsymbol{e}_n = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \boldsymbol{e}_k.$$

On a

$$(\alpha_1 - \beta_1)\boldsymbol{e}_1 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)\boldsymbol{e}_n = \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - \beta_k)\boldsymbol{e}_k = 0.$$

Or la famille $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ est libre. Donc $\alpha_k - \beta_k = 0$ pour tout $k = 1, \ldots, n$. On en déduit l'unicité du $n-$uplet α. ■

Remarque : Par définition, toute famille $(\boldsymbol{f}_i)_{1 \leq i \leq p}$ de vecteurs est une famille génératrice de l'espace vectoriel engendré $\mathrm{Vect}(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_p)$ (qui est l'ensemble des combinaisons linéaires de $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_p$). C'est une base de $\mathrm{Vect}(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_p)$ si et seulement si la famille est libre.

Définition 4.13 (Matrice d'une famille de vecteurs dans une base) *Soit $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.*

- *Soient $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_p$ p éléments de E. La matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de la famille $(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_p)$ dans la base $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ est la matrice dont la i ème colonne est constituée des coordonnées de f_i dans la base $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$. Explicitement, si $f_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \boldsymbol{e}_i$ pour tout $1 \leq j \leq p$, alors $A = (a_{i,j})$.*
- *Réciproquement, si on se donne une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on peut lui associer une famille de vecteurs $(\boldsymbol{f}_1, \ldots \boldsymbol{f}_p)$ dont les composantes dans la base $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ sont les vecteurs colonnes de la matrice A.*

Exemple : Considérons l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 3. La famille $\{1, X, X^2, X^3\}$ en est une base. Soient $P(X) = X^3 + 2X - 1$, $Q(X) = X^2 - 1$ et $R = 3X^3 + 2X^2 + X + 1$. Alors la matrice A associée à la famille $\{P, Q, R\}$ dans la base $\{1, X, X^2, X^3\}$ est

$$A := \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

La proposition suivante est très importante en pratique : supposons donnée une famille de vecteurs. On se demande si elle est libre ou génératrice. On est ramené à la détermination du noyau ou de l'image d'une matrice construite à partir de cette famille de vecteurs :

Proposition 4.14 *Soit $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Soient $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_p$ p éléments de E et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice de la famille $(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_p)$ dans la base $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$. Alors*

1. *la famille $(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_p)$ est libre ssi $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$ ssi $(c_1(A), \cdots, c_p(A))$ est libre.*
2. *la famille $(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_p)$ est génératrice ssi $\mathrm{Im}(A) = \mathbb{K}^n$ ssi $(c_1(A), \cdots, c_p(A))$ est génératrice de $\mathbb{K}^n$.*

Démonstration : Pour le point 1., le fait que la famille des vecteurs colonnes $(c_1(A), \ldots, c_p(A))$ est libre ssi $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$ résulte de la proposition 3.21. Il reste donc à voir que $(c_1(A), \ldots, c_p(A))$ est libre ssi $(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_p)$ est libre. Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$. Alors $\sum_{j=1}^{p} \alpha_j f_j = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{p} \alpha_j (\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \boldsymbol{e}_i) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{p} \alpha_j a_{i,j}) \boldsymbol{e}_i = 0 \Leftrightarrow$ pour tout $1 \leq i \leq n$, $\sum_{j=1}^{p} \alpha_j a_{i,j} = 0$ (car la famille $(\boldsymbol{e}_i)$ est libre) $\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{p} \alpha_j c_j(A) = 0$. Ainsi, $(c_1(A), \ldots, c_p(A))$ est libre ssi $(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_p)$ est libre.
Montrons le point 2. On a vu au chapitre précédent que $\mathrm{Im}(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des $c_1(A), \ldots, c_p(A)$. Donc $\mathrm{Im}(A) = \mathbb{K}^n$ ssi la famille $(c_1(A), \ldots, c_p(A))$ est génératrice de $\mathbb{K}^n$. Soit $Y := \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ dans $\mathbb{K}^n$ et $y = y_1 \boldsymbol{e}_1 + \cdots + y_n \boldsymbol{e}_n \in E$. Alors il existe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $y = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j f_j \Leftrightarrow y = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j (\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \boldsymbol{e}_i) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{p} \alpha_j a_{i,j}) \boldsymbol{e}_i = y \Leftrightarrow$ pour tout $1 \leq i \leq n$, $y_i = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j a_{i,j} \Leftrightarrow Y = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j c_j(A)$. Donc $(c_1(A), \ldots, c_p(A))$ est génératrice dans $\mathbb{K}^n$ ssi $(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_p)$ est génératrice dans E. Le point 2. est démontré. ■

Ainsi, pour savoir si la famille (P, Q, R) donnée dans l'exemple précédant la proposition est libre ou génératrice, on calcule le noyau et l'image de la matrice A, par exemple en l'échelonnant. Ici, on trouve (exercice) que le noyau est nul donc les colonnes de la matrice sont linéairement indépendantes, donc la famille (P, Q, R) est libre. En revanche, l'image de la matrice n'est pas tout $\mathbb{R}^4$ (par exemple, $(1, 0, 0, 0)$ n' y est pas). Donc la famille (P, Q, R) n'est pas génératrice de l'ensemble des polynômes de degré ≤ 3 (les polynômes constants ne peuvent s'écrire comme combinaison linéaire de P, Q et R).

4.1.2 Dimension d'un espace vectoriel

Définition 4.15 (Dimension finie) *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. S'il existe une famille génératrice finie de E, alors on dit que E est de dimension finie. Sinon on dit qu'il est de dimension infinie.*

Par exemple, l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie, et l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est de dimension infinie.

Théorème 4.16 (Existence d'une base) *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors il existe une base (finie) de E.*

Démonstration : On commence par l'observation suivante. Soit $\mathcal{F} = \{\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_p\}$ une famille génératrice finie de E qui n'est pas libre. Alors l'un des vecteurs $f_i \in \mathcal{F}$ s'écrit comme combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathcal{F}$. On en déduit que tous les vecteurs de $\mathcal{F}$ appartiennent à $\mathrm{Vect}(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_{i-1}, \boldsymbol{f}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{f}_p)$. Donc

$$\mathrm{Vect}(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_p) = \mathrm{Vect}(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_{i-1}, \boldsymbol{f}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{f}_p).$$

Donc la famille $\mathcal{F}_1 = \{\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_{i-1}, \boldsymbol{f}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{f}_p\}$ est encore génératrice.
On prouve alors le théorème. On montre par récurrence sur $1 \leq k$ que pour tout espace vectoriel E contenant une famille génératrice $\mathcal{F} = \{\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_k\}$ de E, il existe une base de E. Pour $k = 1$: soit E tel qu'il existe $\mathcal{F} = \{\boldsymbol{f}_1\}$ génératrice, alors ou bien $\boldsymbol{f}_1 \neq 0$ auquel cas $\mathcal{F}$ est libre et donc une base, ou bien $\boldsymbol{f}_1 = 0$ ce qui veut dire que $E = \{\mathbf{0}\}$ et la famille à 0 éléments est une base de E (c'est une convention).
Supposons le résultat vrai pour k, montrons-le pour $k + 1$. Soit E un espace vectoriel qui contient une famille génératrice à $k + 1$ éléments $\mathcal{F} = \{\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_{k+1}\}$. Si elle est libre, c'est une base, et l'hypothèse est vérifiée au rang $k + 1$. Si elle n'est pas libre, par l'observation préliminaire, il existe $\boldsymbol{f}_i$ tel que la famille $\mathcal{F}_1 := \mathcal{F} \setminus \{\boldsymbol{f}_i\}$ soit encore génératrice. On applique l'hypothèse de récurrence à l'ordre k. On en déduit l'existence d'une base.
Conclusion : S'il existe une famille génératrice finie, il existe une base. ■

Théorème 4.17 (Dimension et bases) *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Toutes les bases ont même nombre d'éléments. Ce nombre est appelé* **dimension** *de l'espace vectoriel E.*

Démonstration : Notons $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ et $(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_p)$ deux bases de E. Montrons que $n = p$. On introduit la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de la famille $(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_p)$ dans la base $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$. Par la Proposition 4.14, $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$ et $\mathrm{Im}(A) = \mathbb{K}^n$. Soit $E \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que EA soit totalement échelonnée. Alors $\mathrm{Ker}(EA) = \{0\}$. Donc les colonnes de EA forment une famille libre. Donc il n'y pas de colonne non pivotale (par la Proposition 3.15). Donc le nombre r de colonnes pivotales est p. On a aussi $\mathrm{Im}(EA) = \mathbb{K}^n$. Donc EA n'a pas de ligne nulle (sinon $\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ne serait pas dans $\mathrm{Im}(EA)$). Donc $r = n$. On en déduit $p = n$. ■

Dans la preuve précédente, on a montré que si une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ vérifie $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$ et $\mathrm{Im}(A) = K^n$ alors $n = p$.

Exemples :
- $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n (penser à la base canonique !).
- L'espace $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4 dont une base est formée des matrices $E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Cette base $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ est appelée **base canonique**.

– $\mathbb{K}_n[X]$ est l'espace des polynômes de degré $\leq n$. Une base est formée par les polynômes $1, X, \ldots, X^n$. La dimension de $\mathbb{K}_n[X]$ est donc $n+1$.

Remarque 4.18 *Un sous espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On peut donc parler de dimension d'un sous espace vectoriel.*

Définition 4.19 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.*
– *Les sous espaces vectoriels de dimension 1 sont appelés des* **droites***.*
– *Les sous espaces vectoriels de dimension 2 sont appelés des* **plans***.*
– *Les sous espaces vectoriels de dimension $n-1$ sont appelés des* **hyperplans***.*

4.1.3 Théorème de la base incomplète et conséquences

Théorème 4.20 (Théorème de la base incomplète) *Soit p un entier positif, $(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_p)$ une famille libre d'un espace vectoriel E de dimension n. Soit $(\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_q)$ une famille génératrice de E. Alors il existe une base $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ de E telle que $\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{f}_i$ pour tout $i \leq p$ et $\boldsymbol{e}_i \in \{\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_q\}$ pour tout $i > p$.*

Démonstration : Soit $\mathcal{B}$ une base de E. On note A_1 la matrice de la famille $(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_p)$ dans $\mathcal{B}$, A_2 celle de $(\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_q)$ et A celle de $(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_p, \boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_q)$. Il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que PA soit totalement échelonnée. On note $J := (j_1, \ldots, j_r)$ l'ensemble des indices des colonnes pivotales de PA. Alors (Proposition 4.9) $(c_{j_1}(PA), \ldots, c_{j_r}(PA))$ est une base de $\mathrm{Im}(PA)$, donc $(c_{j_1}(A), \ldots, c_{j_r}(A))$ est une base de $\mathrm{Im}(A)$ (par le lemme 4.10). Comme $(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_p)$ est libre, les colonnes de A_1 forment une famille libre (Proposition 4.14) donc aussi celles de PA_1 (par le lemme 4.10), donc toutes les colonnes de PA_1 sont pivotales (Proposition 3.15). Ainsi $j_1 = 1, \ldots, j_p = p$, c'est-à-dire $c_{j_1}(A) = c_1(A_1), \ldots, c_{j_p}(A) = c_p(A_1)$. Comme $(g_1, \ldots, g_q)$ est une famille génératrice, $\mathrm{Im}(A_2) = \mathbb{K}^n$. L'espace des colonnes de A contient l'espace des colonnes de A_2. Donc $\mathrm{Im}(A) \supset \mathrm{Im}(A_2) = \mathbb{K}^n$. Donc $(c_{j_1}(A), \ldots, c_{j_r}(A)) = (c_1(A_1), \ldots, c_p(A_1), c_{j_{p+1}}(A), \ldots, c_{j_r}(A))$ est une base de $\mathbb{K}^n$. On en déduit que $(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_p, \boldsymbol{g}_{j_{p+1}-p}, \ldots, \boldsymbol{g}_{j_r-p})$ est une base de E (Proposition 4.14). ■

La preuve donne un moyen pratique pour choisir des vecteurs d'une famille $(\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_q)$ permettant de compléter une famille libre $(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_p)$ en une base de E. Il suffit d'écrire la matrice A des coordonnées de $(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_p, \boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_q)$ dans une base et de ne retenir que les colonnes pivotales dans une matrice échelonnée à partir de A.

Corollaire 4.21 *Soit E un espace vectoriel de dimension n.*
1. *Si $(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_p)$ est une famille libre de E, alors $p \leq n$. Si de plus $p = n$, alors $(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_p)$ est une base.*
2. *Si $(\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_q)$ est une famille génératrice de E, alors $q \geq n$ et il existe une sous-famille de $(\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_q)$ formant une base de E. Si de plus $q = n$, alors $(\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_q)$ est une base de E.*

Démonstration : Pour 1., appliquer le Théorème 4.20 à $(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_p)$ et à une base quelconque $(\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_n)$ de E. Pour 2., c'est le cas $p = 0$ dans l'énoncé du théorème. ■

Corollaire 4.22 *Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Soit F un sous-espace de E. Alors*
1) F est de dimension finie.
2) $\dim F \leq n$.
3) Si $\dim F = n$, alors $E = F$.

Démonstration : Toutes les familles libres de F ont un cardinal $\leq n$, d'après le corollaire précédent. Soit p le nombre maximal d'éléments que peut contenir une famille libre de F. On a donc $p \leq n$ et en particulier, toute famille de F qui a $p+1$ éléments est nécessairement liée. Soit $(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_p)$ une famille libre de F à p éléments. On va montrer qu'elle est génératrice de F, c'est-à-dire que tout élément de F est combinaison linéaire de $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_p$. Soit $\boldsymbol{x} \in F$ et considérons la famille $(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_p, x)$. Elle est liée car elle a $p+1$ éléments. Donc il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \mu$ non tous nuls tels que

$$\lambda_1 \boldsymbol{f}_1 + \ldots + \lambda_p \boldsymbol{f}_p + \mu \boldsymbol{x} = \mathbf{0}.$$

Nécessairement $\mu \neq 0$ car sinon $\sum_i \lambda_i \boldsymbol{f}_i = \mathbf{0}$ avec les λ_i non tous nuls, ce qui contredit que la famille $(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_p)$ est libre. On peut donc écrire

$$\boldsymbol{x} = \frac{-1}{\mu}(\lambda_1 \boldsymbol{f}_1 + \ldots + \lambda_p \boldsymbol{f}_p).$$

Donc la famille $(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_p)$ est génératrice. Comme elle est libre, c'est donc une base de F. Donc F est de dimension finie p, avec $p \leq n$. Si $p = n$, alors $(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n)$ est une famille libre de E qui a n éléments, donc est une base de E par le corollaire précédent. Donc tout élément de E peut s'écrire comme combinaison linéaire des $\boldsymbol{f}_i$ qui sont des éléments de F. Donc tout élément de E est dans F. Donc $E = F$. ■

4.1.4 Rang d'une famille de vecteurs

Au chapitre précédent, on a déjà introduit le rang d'une matrice. En particulier, pour une matrice échelonnée, il s'agit du nombre de colonnes pivotales, c'est-à-dire aussi du nombre de lignes non nulles. On a vu à la proposition 4.11 que les colonnes $(c_{i_1}(A), \ldots, c_{i_r}(A))$ d'une matrice A dont les indices $1 \leq i_1 < \cdots < i_r$ sont les indices des colonnes pivotales d'une de ses formes échelonnées EA où E est une matrice inversible, forment une base de $C(A)$ ou $\mathrm{Im}(A)$. En particulier $r = \mathrm{rg}(PA)$ est la dimension de $\mathrm{Im}(A)$.
On en déduit une autre définition possible du rang :

Corollaire 4.23 *Le rang d'une matrice A est la dimension de $C(A) = \mathrm{Im}(A)$.*

L'échelonnement (partiel ou total) d'une matrice A permet donc de déterminer son rang et son image (en comptant le nombre de colonnes pivotales d'une matrice échelonnée B associée à A). De plus, on obtient en même temps une base de l'image de A en sélectionnant les colonnes de A ayant les indices des colonnes pivotales.

Proposition 4.24 *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$, $Q \in GL_p(\mathbb{K})$ deux matrices inversibles. Alors le rang des matrices A, PA et AQ sont égaux :*

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(PA) = \mathrm{rg}(AQ).$$

Démonstration : Notons r le rang de A. Il existe une sous-famille de la famille des colonnes de A formant une base de $\mathrm{Im}(A)$. Soient $1 \leq j_1 < \cdots < j_r$ tels que $(c_{j_1}(A), \ldots, c_{j_r}(A))$ est une base de $\mathrm{Im}(A)$. Alors par le lemme 4.10, $(c_{j_1}(PA), \ldots, c_{j_r}(PA))$ est une base de $\mathrm{Im}(PA)$. Donc $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(PA)$.
Remarquons ensuite que $\mathrm{Im}(AQ) \subset \mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(AQQ^{-1}) \subset \mathrm{Im}(AQ)$. La première inclusion donne $\mathrm{rg}(AQ) \leq \mathrm{rg}(A)$ et la deuxième donne $\mathrm{rg}(A) \leq \mathrm{rg}(AQ)$. D'où le résultat. ■

On définit maintenant le rang d'une famille de vecteurs :

Définition 4.25 (Rang d'une famille de vecteurs) *Soit $(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_p)$ une famille de p vecteurs d'un espace vectoriel E. On appelle* **rang de la famille** *$(\boldsymbol{f}_i)_i$, la dimension de l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_p)$.*

Remarque 4.26 *Le rang de la famille $(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_p)$ est au plus égal à p (car $(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_p)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Vect}(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_p)$). Une famille de p vecteurs est libre si le rang de cette famille est égal à p.*

Comment déterminer en pratique le rang d'une famille de vecteurs ? Si on connaît les coordonnées de ces vecteurs dans une base, il suffit d'écrire la matrice de cette famille de vecteurs dans cette base, et de calculer le rang de cette matrice en l'échelonnant. C'est ce que dit la proposition suivante :

Proposition 4.27 *Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Le rang de la famille $(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_p)$ est égal au rang de la matrice des composantes des vecteurs $\boldsymbol{f}_i$ dans la base $\mathcal{B}$.*

Démonstration : On rappelle (proposition 4.14) qu'une famille de vecteurs est libre ssi les colonnes de la matrice de cette famille dans une base sont linéairement indépendantes.
On note X_i le vecteur colonne des composantes de $\boldsymbol{f}_i$ dans la base $\mathcal{B}$ et A la matrice $[X_1 \ldots X_p]$. Soit r le rang de A. Il existe $1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq p$ tels que $X_{j_1}, \ldots, X_{j_r}$ soit une base de $\mathrm{Im}(A)$. En particulier, c'est une famille libre. Alors les vecteurs $(\boldsymbol{f}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{f}_{j_r})$ forment une famille libre. Soit $j \notin \{j_1, \ldots, j_r\}$. Alors $(X_{j_1}, \ldots, X_{j_r}, X_j)$ n'est pas libre, donc les vecteurs $(\boldsymbol{f}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{f}_{j_r}, \boldsymbol{f}_j)$ forment une famille liée. On en déduit que $\boldsymbol{f}_j \in \mathrm{Vect}(\boldsymbol{f}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{f}_{j_r})$ et finalement que $(\boldsymbol{f}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{f}_{j_r})$ est génératrice. Donc $(\boldsymbol{f}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{f}_{j_r})$ est une base de $\mathrm{Vect}(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_p)$ et finalement $\mathrm{rg}(X_1, \ldots, X_p) = \mathrm{rg}(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_p)$. ■

La preuve précédente donne en plus un moyen de trouver une base de $\mathrm{Vect}(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_p)$. On écrit la matrice A de $\{\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_p\}$ dans une base. On l'échelonne. On repère les indices des colonnes pivotales $j_1 < \cdots < j_r$. Alors la famille $\{\boldsymbol{f}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{f}_{j_r}\}$ est une base de $\mathrm{Vect}(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_p)$.

Proposition 4.28 *Le rang de $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est égal au rang de $A^t \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Le rang de A est aussi égal à la dimension de l'espace vectoriel $L(A)$ engendré par les vecteurs lignes de A.*

Démonstration : On peut supposer que A est totalement échelonnée. En effet, si A n'est pas totalement échelonnée, soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que PA soit totalement échelonnée. Alors $\operatorname{rg}(PA) = \operatorname{rg}(A)$ et $\operatorname{rg}(A^tP^t) = \operatorname{rg}(A^t)$. On suppose donc désormais A totalement échelonnée.
Montrons que la famille des lignes non nulles de A forment une base de l'ensemble des vecteurs lignes de A. Notons r le nombre de lignes non nulles de A et $1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq p$ les indices des colonnes pivotales. Alors pour $k \in \{1, \ldots, r\}$, la k-ième ligne $\ell_k(A)$ est de la forme $\ell_k(A) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * \end{bmatrix}$ où le 1 est placé sur la colonne j_k. De plus, les nombres à droite du 1 sont nuls lorsqu'ils sont sur une colonne pivotale (car la matrice est totalement échelonnée). Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ tels que $\alpha_1\ell_1(A) + \cdots + \alpha_r\ell_r(A) = 0$. Montrons que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0$. Le vecteur ligne $\alpha_1\ell_1(A) + \cdots + \alpha_r\ell_r(A)$ a dans sa colonne d'indice j_1 le nombre α_1, dans sa colonne d'indice j_2 le nombre α_2, etc... Donc on a bien $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0$.
Comme les lignes non nulles de A donnent par transposition une base des colonnes de A^t, $r = \operatorname{rg}(A^t)$. Mais r est aussi le nombre de colonnes pivotales de A, et donc $r = \operatorname{rg}(A)$. Donc $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^t)$. ∎

4.1.5 Exercices

Exercice 90 *Les familles de vecteurs suivantes sont-elles libres ou liées ?*

1. $\{(1,1),\ (1,-1),(0,1)\}$ *dans* $\mathbb{R}^2$.
2. $\{(1,1),\ (1,3)\}$ *dans* $\mathbb{R}^2$.
3. $\{(1,2,-1),\ (-2,1,1),(1,-1,2)\}$ *dans* $\mathbb{R}^3$.
4. $\{(1,2,-1),\ (-2,1,1)\}$ *dans* $\mathbb{R}^3$.
5. $\{0,\ \boldsymbol{u}_1,\ \ldots \boldsymbol{u}_n\}$, $\boldsymbol{u}_i \in \mathbb{R}^n$.
6. $\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_1,\ \ldots \boldsymbol{u}_n\}$, $\boldsymbol{u}_i \in \mathbb{R}^n$.
7. $\{\boldsymbol{e}_1,\ \ldots \boldsymbol{e}_n\}$ *avec* $\boldsymbol{e}_i$ *les vecteurs canoniques de* $\mathbb{R}^n$.

Exercice 91 *Soient $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ et $\boldsymbol{u}_3$ trois vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^n$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose :*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 \\ \boldsymbol{v}_2 &= \boldsymbol{u}_1 + 2\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 \\ \boldsymbol{v}_3 &= \boldsymbol{u}_2 + \alpha\boldsymbol{u}_3 \end{aligned}$$

1. Pour quelles valeurs de α les vecteurs $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$, sont ils linéairement indépendants ?
Soit $U = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 \end{bmatrix}$ et $V = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{bmatrix}$. Ecrire V sous la forme $V = UM$ où M est une matrice carrée d'ordre 3, et montrer que les vecteurs $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ sont linéairement indépendants si et seulement si la matrice M est inversible.

Exercice 92 *Trouver le plus grand nombre possible de vecteurs linéairement indépendants parmi les vecteurs suivants :*

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Exercice 93 *Soient E un espace vectoriel et $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3$ trois vecteurs non nuls.*

1. *Montrer que si les sous-espaces vectoriels engendrés respectivement par $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2$ et par $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_3$ coïncident, alors la famille $\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3\}$ est liée.*
2. *La réciproque est elle vraie ?*

Exercice 94 *Dans $\mathbb{R}^3$ vérifier que les vecteurs $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ forment une base :*

1. $\boldsymbol{a} = (2,1,-3)$, $\boldsymbol{b} = (3,2,-5)$, $\boldsymbol{c} = (1,-1,1)$
2. $\boldsymbol{a} = (1,1,1)$, $\boldsymbol{b} = (1,1,2)$, $\boldsymbol{c} = (1,2,3)$

Exprimer les vecteurs $(6, 2, -7)$ *et* $(6, 9, 14)$ *dans ces bases.*

Exercice 95 *Dans l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^3$*, les vecteurs suivants constituent-ils une base ? (On pourra utiliser la méthode de l'échelonnement)*

1. $\boldsymbol{u}_1 = (1, -1, 0), \quad \boldsymbol{u}_2 = (1, 0, 1), \quad \boldsymbol{u}_3 = (1, 2, 3).$
2. $\boldsymbol{u}_1 = (1, 0, -1), \quad \boldsymbol{u}_2 = (0, 1, 0), \quad \boldsymbol{u}_3 = (1, 1, 0).$
3. $\boldsymbol{u}_1 = (1, 2, 3), \quad \boldsymbol{u}_2 = (2, 3, 1), \quad \boldsymbol{u}_3 = (0, 0, 0).$
4. $\boldsymbol{u}_1 = (1, 0, 0), \quad \boldsymbol{u}_2 = (1, 1, 0), \quad \boldsymbol{u}_3 = (1, 1, 1).$
5. $\boldsymbol{u}_1 = (1, 1, -1), \quad \boldsymbol{u}_2 = (1, -1, 1), \quad \boldsymbol{u}_3 = (-1, 1, 1).$

Exercice 96 *Montrer que si* $(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$ *est une base de* $\mathbb{R}^n$ *et* A *est une matrice inversible, alors* $(A\boldsymbol{u}_1, \ldots, A\boldsymbol{u}_n)$ *est aussi une base* $\mathbb{R}^n$*.*

Exercice 97 *Montrer que les vecteurs*

$$\boldsymbol{u}_1 = (0, 1, 1, 1),\ \boldsymbol{u}_2 = (1, 0, 1, 1),\ \boldsymbol{u}_3 = (1, 1, 0, 1),\ \boldsymbol{u}_4 = (1, 1, 1, 0)$$

forment une base de $\mathbb{R}^4$*. Dans cette base, calculer les composantes des vecteurs*

$$\boldsymbol{u} = (1, 1, 1, 1) \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{u} = (1, 0, 0, 0).$$

Exercice 98 *On considère, dans l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^3$*, la famille de vecteurs suivants :*

$$(1, 1, \alpha),\ (1, \alpha, 1),\ (\alpha, 1, 1).$$

Déterminer en fonction de α *le rang de cette famille de vecteurs.*

Exercice 99 *Quel est le rang des systèmes de vecteurs suivants ? (On pourra utiliser la méthode de l'échelonnement). Dire si les vecteurs sont linéairement indépendants et s'ils forment une base.*

1. $\boldsymbol{u}_1 = (1, 0, 1)$, $\boldsymbol{u}_2 = (1, 1, 0)$, $\boldsymbol{u}_3 = (0, 1, 1)$.
2. $\boldsymbol{u}_1 = (1, 0, 0, 1)$, $\boldsymbol{u}_2 = (1, 1, 0, 0)$, $\boldsymbol{u}_3 = (0, 1, 1, 0)$, $\boldsymbol{u}_4 = (0, 0, 1, 1)$.
3. $\boldsymbol{u}_1 = (1, 1, 0, 1)$, $\boldsymbol{u}_2 = (-1, 1, 1, 0)$, $\boldsymbol{u}_3 = (0, -1, 1, 1)$, $\boldsymbol{u}_4 = (1, 1, 1, 0)$.
4. $\boldsymbol{u}_1 = (1, -1, 0, 1)$, $\boldsymbol{u}_2 = (1, 1, -1, 1)$, $\boldsymbol{u}_3 = (0, 1, 1, 1)$, $\boldsymbol{u}_4 = (1, 0, 1, 0)$.
5. $\boldsymbol{u}_1 = (1, 0, 0, 2, 5)$, $\boldsymbol{u}_2 = (0, 1, 0, 3, 4)$, $\boldsymbol{u}_3 = (0, 0, 1, 4, 7)$, $\boldsymbol{u}_4 = (2, -3, 4, 11, 12)$.

Exercice 100 *Déterminer la dimension des sous-espaces vectoriels engendrés par chacune des 4 familles de vecteurs ci-dessous. Donnez en une base et exprimer les coordonnées de chacun des vecteurs de la famille dans la base trouvée.*

1. *la famille* $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4, \boldsymbol{u}_5\}$ *avec :*

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_5 = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix},$$

2. *la famille* $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\}$ *avec :*

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -13 \end{bmatrix},$$

3. *la famille* $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3, \boldsymbol{w}_4, \boldsymbol{w}_5\}$ *avec :*

$$\boldsymbol{w}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{w}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{w}_3 = \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{w}_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{w}_5 = \begin{bmatrix} 8 \\ -6 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

4. *la famille* $\{\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \boldsymbol{z}_3, \boldsymbol{z}_4\}$ *avec :*

$$\boldsymbol{z}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{z}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{z}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{z}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Exercice 101 (Bases et dimension de sous-espaces de matrices)

1. *Montrer que* $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ *est une base de l'espace des matrices carrées réelles d'ordre* 2 *; en déduire la dimension de cet espace.*
2. *Donner une base et la dimension des matrices carrées d'ordre* n.
3. *Donner une base et la dimension des matrices carrées d'ordre* n *diagonales.*
4. *Donner une base et la dimension des matrices carrées d'ordre* n *symétriques.*
5. *Donner une base et la dimension des matrices carrées d'ordre* n *triangulaires supérieures.*

Exercice 102 (Familles de fonctions) *Soit* E *l'espace vectoriel des fonctions de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *. Dire parmi les familles suivantes celles qui sont libres et celles qui sont liées. Ici les vecteurs (au sens éléments d'un espace vectoriel) sont donc des fonctions...*

1. $\{f, g, h\}$, *avec* $f(x) = 2$, $g(x) = 4\sin^2(x)$, $h(x) = \cos^2(x)$
2. $\{f, g, h\}$, *avec* $f(x) = 1$, $g(x) = \sin(x)$,$h(x) = \sin(2x)$.
3. $\{f, g\}$, *avec* $f(x) = x$, $g(x) = \cos(x)$.
4. $\{f, g, h, k\}$, *avec* $f(x) = (1 + x)^2$, $g(x) = x^2 + 2x$, $h(x) = 3$ *et* $k(x) = x$.
5. $\{f, g, h\}$, *avec* $f(x) = \cos(2x)$, $g(x) = \sin^2(x)$ *;* $h(x) = \cos^2(x)$.
6. $\{f, g, h\}$, *avec* $f(x) = 0$, $g(x) = x$, $h(x) = x^2$.

Exercice 103 (Sous espaces vectoriels et bases) *Soient* E *un espace vectoriel,* F *et* G *des sous espaces vectoriels.*

1. *Montrer que* $F \cap G$ *est un sous espace vectoriel de* E.
2. *On prend ici* $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathrm{Vect}\,(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ *et* $G = \mathrm{Vect}\,(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{z})$ *avec :*

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, et \boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) *Trouver des bases de* F *et* G.

   (b) *Déterminer le sous espace* $F \cap G$ *et en donner une base.*

3. *On prend toujours* $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathrm{Vect}\,(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ *et* $G = \mathrm{Vect}\,(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{z})$ *mais avec :* $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, *et* $\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   (a) *Trouver des bases de* F *et* G

(b) *Déterminer le sous espace $F \cap G$. Ce sous espace admet-il une base ?*

Exercice 104 (Sous espace vectoriel de polynômes) *Soit E l'ensemble des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 4. On a montré dans l'exercice 67 que E est un espace vectoriel.*

1. Donner une base de E.

Soit F l'ensemble des polynômes admettant les racines $x = a$ et $x = b \neq a$. On a montré dans l'exercice 67 que F est un sous espace vectoriel de E.

2. Donner une base de E.

3. Etudier le cas $a = b$.

Exercice 105 *Quelle partie du plan décrivent les points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que les vecteurs $(1, 1 + x)$ et $(1 - x, y)$ forment une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$?*

Exercice 106 *Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ deux familles finies de E. On suppose que $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$.*
Montrez que si $\mathcal{P}$ est libre alors $\mathcal{P}'$ est libre. Montrer que si $\mathcal{P}'$ est génératrice alors $\mathcal{P}$ est génératrice.
Peut-on avoir une réciproque ? Donner une démonstration ou un contre exemple.

Exercice 107 *Proposer une preuve du théorème 4.20 inspirée de celle du théorème 4.16.*

Exercice 108 (Solutions d'une équation différentielle)
1. Montrer que l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ de l'équation différentielle $y'' = y$ est un sous espace vectoriel de l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2. On admettra (théorème de Cauchy Lipschitz) que la fonction identiquement nulle est la seule solution de l'équation avec données initiales :

$$\begin{aligned} y''(t) &= y(t), t \in \mathbb{R}_+ \\ y(0) &= 0,\ y'(0) = 0. \end{aligned}$$

En déduire la solution (unique) de l'équation différentielle avec données initiales :

$$\begin{aligned} y''(t) &= y(t), t \in \mathbb{R}_+ \\ y(0) &= a,\ y'(0) = b. \end{aligned}$$

Trouver la solution génŕale de l'équation $y'' = y$.

3. En déduire que $\mathcal{S}$ est un sous espace vectoriel de dimension 2 dont on donnera une base.

4. Trouver une solution particulière de l'équation $y'' = y + 1$. Donner la solution de de l'équation différentielle avec données initiales :

$$\begin{aligned} y''(t) &= y(t) + 1, t \in \mathbb{R}_+ \\ y(0) &= 1,\ y'(0) = 1. \end{aligned}$$

Exercice 109 (Sous espace de matrices) *1. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?*

2. Donner les six matrices de permutation de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

3. Montrer que Id_3 est une combinaison linéaire des cinq autres matrices de permutation, qu'on note $P_1, \ldots, P_5$.

3. Montrer que $\{P_1, \ldots, P_5\}$ est une famille libre de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

4. Montrer que $\{P_1, \ldots, P_5\}$ engendre le sous-espace S des matrices dont toutes les sommes de coefficients par ligne et colonne sont égales.

5. En déduire la dimension de S.

Exercice 110 (Intersection de deux sous espaces) *Soient E et F deux sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. On suppose que $\dim(E) + \dim(F) > n$. Montrer que $E \cap F$ n'est pas réduit au vecteur nul.*

4.2 Sous espaces vectoriels supplémentaires, orthogonalité

4.2.1 Somme et intersection de deux espaces vectoriels

Proposition 4.29 (Intersection de sous espaces vectoriels) *Soient F et G deux sous espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, alors $H = F \cap G$ est un sous espace vectoriel de E.*

Démonstration : On remarque tout d'abord que $\mathbf{0}_E \in F \cap G$. Soit $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in F \cap G$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Comme F et G sont des sous espaces vectoriels de E, on sait que $\lambda \boldsymbol{x} + \mu \boldsymbol{y} \in F$ et $\lambda \boldsymbol{x} + \mu \boldsymbol{y} \in G$. Par conséquent, $\lambda \boldsymbol{x} + \mu \boldsymbol{y} \in F \cap G$, donc $F \cap G$ est bien un sous espace vectoriel de E. ■

On rappelle que l'union de deux sous espaces vectoriels n'est pas forcément un sous espace vectoriel, voir exercice 73. Mais on a vu au même exercice qu'on peut définir la somme de deux sous espaces vectoriels, qui est aussi l'espace engendré par l'union des deux sous espaces.

Définition 4.30 (Somme de sous espaces vectoriels) *Soient F et G deux sous espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On note*

$$H = F + G = \{\boldsymbol{x} \in E \textit{ tels que } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} \textit{ avec } \boldsymbol{y} \in F,\ \boldsymbol{z} \in G\}.$$

L'espace H est un sous espace vectoriel de E appelé **somme de** F **et** G.

Démonstration : Comme $\mathbf{0}_E \in F \cap G$, on a bien $\mathbf{0}_E + \mathbf{0}_E = \mathbf{0}_E \in F + G$. Soit $\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2 \in F + G$. On a $\boldsymbol{z}_1 = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{y}_1$ et $\boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{y}_2$ avec $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in F$, $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in G$. On a alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$,

$$\lambda \boldsymbol{z}_1 + \mu \boldsymbol{z}_2 = \lambda(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{y}_1) + \mu(\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{y}_2) = \underbrace{(\lambda \boldsymbol{x}_1 + \mu \boldsymbol{x}_2)}_{\in F} + \underbrace{(\lambda \boldsymbol{y}_1 + \mu \boldsymbol{y}_2)}_{\in G} \in F + G.$$

On conclut que $F + G$ est un sous espace vectoriel de E. ■

Proposition 4.31 (Famille génératrice de $F + G$) *Soient F et G deux sous espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Si $(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_p)$ est une famille génératrice de F et $(\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_q)$ est une famille génératrice de G alors la famille $(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_p, \boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_q)$ est une famille génératrice de $H = F + G$.*

Démonstration : Soit $\boldsymbol{z} \in F + G$. On a $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ avec $\boldsymbol{x} \in F$ et $\boldsymbol{y} \in G$. Comme $(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_p)$ est une famille génératrice de F et $(\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_q)$ est une famille génératrice de G, on a

$$x = \alpha_1 \boldsymbol{f}_1 + \cdots + \alpha_p \boldsymbol{f}_p \text{ et } \boldsymbol{y} = \beta_1 \boldsymbol{g}_1 + \cdots + \beta_q \boldsymbol{g}_q.$$

Par suite, on peut écrire

$$z = \alpha_1 \boldsymbol{f}_1 + \cdots + \alpha_p \boldsymbol{f}_p + \beta_1 \boldsymbol{g}_1 + \cdots + \beta_q \boldsymbol{g}_q.$$

La famille $(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_p, \boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_q)$ est donc une famille génératrice de $H = F + G$. ■

Définition 4.32 (Somme directe) *Soient F et G deux sous espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On dit que F et G sont en* **somme directe** *si $F \cap G = \{0\}$.*

Définition 4.33 (Sous-espaces supplémentaires) *Soient F et G deux sous espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On dit que F et G sont* **supplémentaires** *dans E, et on note $E = F \oplus G$, si $E = F + G$ et si F et G sont en somme directe.*

Proposition 4.34 (Première CNS pour les sous-espaces supplémentaires) *Soient F et G deux sous espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Les espaces F et G sont supplémentaires si et seulement si tout vecteur $\boldsymbol{x} \in E$ s'écrit de façon unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.*

Démonstration : Supposons que tout vecteur $\boldsymbol{x} \in E$ s'écrit de façon unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G et montrons que F et G sont supplémentaires. On a bien $E = F + G$. De plus, supposons par l'absurde qu'il existe $\boldsymbol{z} \in F \cap G \neq \{\mathbf{0}_E\}$. Alors on peut écrire $\boldsymbol{z}$ de deux façons différentes $\boldsymbol{z} = \underbrace{\boldsymbol{z}}_{\in F} + \underbrace{\mathbf{0}_E}_{\in G}$

et $\boldsymbol{z} = \underbrace{\mathbf{0}_E}_{\in F} + \underbrace{z}_{\in G}$ ce qui contredit l'unicité de l'écriture. Par conséquent, $F \cap G = \{\mathbf{0}_E\}$. Réciproquement si $E = F + G$ et $F \cap G = \{\mathbf{0}_E\}$, tout $\boldsymbol{z} \in E$ s'écrit sous la forme $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ avec $\boldsymbol{x} \in F$ et $\boldsymbol{y} \in G$. Si cette décomposition n'est pas unique, on a $\boldsymbol{z} = \underbrace{\boldsymbol{x}_1}_{\in F} + \underbrace{\boldsymbol{y}_1}_{G} = \underbrace{\boldsymbol{x}_2}_{\in F} + \underbrace{\boldsymbol{y}_2}_{\in G}$. On en déduit que $\underbrace{\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2}_{\in F} = \underbrace{\boldsymbol{y}_2 - \boldsymbol{y}_1}_{\in G}$. Comme $F \cap G = \{0_E\}$, on en déduit que $\underbrace{\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2}_{\in F} = \underbrace{\boldsymbol{y}_2 - \boldsymbol{y}_1}_{\in G} = \mathbf{0}_E$. La décomposition de $\boldsymbol{z}$ est donc unique.

Ainsi $E = F \oplus G$. ∎

Proposition 4.35 (Sous espaces supplémentaires et dimension) *Soient F et G deux sous espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. On a*

$$\dim(E) = \dim(F) + \dim(G).$$

Démonstration : Soit $(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n)$ une base de F et $(\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_p)$ une base de G. On a vu que $(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n, \boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_p)$ est une famille génératrice de $E = F + G$. Montrons que c'est aussi une famille libre. On suppose que

$$\alpha_1 \boldsymbol{f}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{f}_n + \beta_1 \boldsymbol{g}_1 + \cdots + \beta_p \boldsymbol{g}_p = 0_E.$$

Par conséquent,

$$\underbrace{\alpha_1 \boldsymbol{f}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{f}_n}_{\in F} = \underbrace{-\beta_1 \boldsymbol{g}_1 - \cdots - \beta_p \boldsymbol{g}_p}_{\in G} \in F \cap G = \{0_E\}.$$

Par suite

$$\alpha_1 \boldsymbol{f}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{f}_n = 0_E \text{ et } \beta_1 \boldsymbol{g}_1 + \cdots + \beta_p \boldsymbol{g}_p = 0_E.$$

Comme $(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n)$ est une base de F et $(\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_p)$ est une base de G, ce sont des familles libres et par conséquent,

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = \beta_1 = \cdots = \beta_p = 0.$$

On conclut que $\dim(E) = n + p = \dim(F) + \dim(G)$. ∎

Proposition 4.36 (Existence d'un supplémentaire) *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Alors il existe un sous-espace vectoriel G de E tel que F et G soient supplémentaires.*

Démonstration : Soient $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ une base de E et $(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_p)$ une base de F. La famille $(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_p)$ est une famille libre de E. Le théorème de la base incomplète (on applique le théorème 4.20 à la famille libre $(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_p)$ et à la famille génératrice $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$) nous dit que l'on peut compléter la famille $(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_p)$ par $\boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_{n-p}}$ pour en faire une base de E. On vérifie alors que $G = \mathrm{Vect}(\boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_{n-p}})$ est un sous espace supplémentaire de F dans E. ∎

Proposition 4.37 (Sous espaces et dimension) *Soient F et G deux sous espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On a*

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Démonstration : Soient F_1 un supplémentaire de $F \cap G$ dans F et G_1 un supplémentaire de $F \cap G$ dans G. Alors $F = F_1 \oplus (F \cap G)$ et $G = G_1 \oplus (F \cap G)$. On en déduit

$$F + G = F_1 \oplus G_1 \oplus (F \cap G).$$

Par conséquent,

$$\dim(F + G) = \dim(F_1) + \dim(G_1) + \dim(F \cap G)$$
$$= (\dim(F) - \dim(F \cap G)) + (\dim(G) - \dim(F \cap G)) + \dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

∎

Proposition 4.38 (Deuxième CNS pour les sous espaces supplémentaires) *Soient F et G des sous espaces vectoriels de E. Alors $E = F \oplus G$ si et seulement si $F \cap G = \{\mathbf{0}_E\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$.*

Démonstration : On a déjà démontré le sens direct (proposition 4.35). Il reste à démontrer la réciproque. Supposons que $F \cap G = \{\mathbf{0}_E\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$. Il reste à voir que $E = F + G$. Par la proposition 4.35, on a $\dim(F + G) = \dim F + \dim G = \dim E$. Donc $F + G$ est un sous espace de E qui a même dimension que E. Cela montre que $E = F + G$ (voir Proposition 4.22). ∎

4.2.2 Sous espaces liés aux matrices

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On va étudier dans ce paragraphe les relations entre les sous espaces suivants liés à la matrice A. On a déjà introduit :
1) l'espace des colonnes $C(A)$, qui est égal à $\mathrm{Im}(A)$, sous espace de $\mathbb{R}^n$,
2) l'espace des lignes $L(A)$, qui est égal à $\mathrm{Im}(A^t)$ sous espace de $\mathbb{R}^p$,
3) le noyau $\mathrm{Ker}(A)$, sous espace de $\mathbb{R}^p$.
On introduit de plus le noyau de la transposée, $\mathrm{Ker}(A^t)$, qui est un sous espace de $\mathbb{R}^n$.
On peut établir des relations importantes entre ces différents espaces.
On a déjà vu que $\dim\, C(A) = \dim\, L(A) = r \leq n$ (c'est une réécriture du fait qu'une matrice et sa transposée ont même rang).
Avec les résultats qu'on a déjà obtenus, on peut facilement obtenir une relation entre les dimensions de $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$.

Théorème 4.39 (Théorème du rang, version matricielle) *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors*

$$\dim(\mathrm{Ker}(A)) + \dim(\mathrm{Im}(A)) = p.$$

Démonstration : Ce résultat est une conséquence du fait que les solutions spéciales forment une base de $\mathrm{Ker}(A)$, ce qu'on a démontré à la proposition 3.23 (sans utiliser le mot "base" car à l'époque on n'avait pas introduit les bases).
En effet, on sait que si r est le rang de A, il existe $p - r$ solutions spéciales formant une base de $\mathrm{Ker}\, A$. On rappelle que les r colonnes pivotales de A forment une base de $\mathrm{Im}(A)$ et qu'on a $\dim \mathrm{Im}(A) = r$. On a donc $\dim \mathrm{Ker}\, A + \dim \mathrm{Im}(A) = p - r + r = p$. ■

Définition 4.40 (Orthogonalité) *On dit que deux sous espaces F et G de $\mathbb{R}^p$ sont orthogonaux si pour tout $\boldsymbol{u} \in F$ et $\boldsymbol{v} \in G$, $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0$.*

Un vecteur $\boldsymbol{x}$ de $\mathrm{Ker}(A)$ est orthogonal à n'importe quelle ligne de A car $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, ce qui est équivalent à dire que $\ell_i(A) \cdot \boldsymbol{x} = 0$ pour $i = 1, \ldots, n$.

Proposition 4.41 (Somme de sous espaces orthogonaux) *Soient F et G de $\mathbb{R}^n$ des sous espaces orthogonaux de $\mathbb{R}^p$, alors ils sont en somme directe. On parle dans ce cas de somme directe orthogonale.*

Démonstration : Soit $\boldsymbol{u} \in F \cap G$. Comme F et G sont orthogonaux, on a donc $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = \|\boldsymbol{u}\|^2 = 0$. (On rappelle que $\|u\|$ désigne la norme euclidienne du vecteur $\boldsymbol{u}$). On en déduit que $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$. ■

En particulier on ne peut avoir deux plans orthogonaux dans $\mathbb{R}^3$…

Théorème 4.42 (Orthogonalité de $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}(A^t)$) *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Alors les ensembles $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}(A^t)$ sont des sous espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux de $\mathbb{R}^p$.*

De plus, les ensembles $\mathrm{Ker}(A^t)$ et $\mathrm{Im}(A)$ sont des sous espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration : On a déjà vu que tout vecteur $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}(A)$ est orthogonal à n'importe quelle ligne de A car $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Donc les sous espaces $\mathrm{Ker}(A)$ et $L(A) = \mathrm{Im}(A^t)$ sont orthogonaux, et leur intersection réduite à $\{\mathbf{0}_E\}$. De plus $\dim \mathrm{Im}(A^t) = \dim \mathrm{Im}(A) = r$, et donc par le théorème du rang, $\dim \mathrm{Ker}(A) + \dim \mathrm{Im}(A^t) = p$. On en déduit par la proposition 4.38 que $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}(A^t)$ sont des sous espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}^p$.
Par transposition, on obtient immédiatement que les ensembles $\mathrm{Ker}(A^t)$ et $\mathrm{Im}(A)$ sont des sous espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux de $\mathbb{R}^n$. ■

Les applications de ce théorème sont multiples. Pour l'instant, nous remarquerons simplement que si $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, alors $\boldsymbol{x}$ se décompose de manière unique en $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_K + \boldsymbol{x}_L$, où $\boldsymbol{x}_K \in \mathrm{Ker}(A)$ et $\boldsymbol{x}_L \in L(A)$. On a donc $A\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}_K + A\boldsymbol{x}_L = A\boldsymbol{x}_L$. Donc tout vecteur $\boldsymbol{b} \in \mathrm{Im}(A)$ peut s'écrire comme $A\boldsymbol{x}_L$ où $\boldsymbol{x}_L \in L(A)$ On a même unicité : tout vecteur $\boldsymbol{b} \in \mathrm{Im}(A)$ peut s'écrire de manière unique comme $A\boldsymbol{x}_L$ où $\boldsymbol{x}_L \in L(A)$; en effet si $\boldsymbol{b} = A\boldsymbol{x}_L = A\boldsymbol{x}'_L$, alors $\boldsymbol{x}_L - \boldsymbol{x}'_L \in \mathrm{Ker}(A)$. Or on sait que $\mathrm{Ker}(A) \cap L(A) = \{\mathbf{0}_E\}$. On en déduit $\boldsymbol{x}_L - \boldsymbol{x}'_L = \mathbf{0}$.

4.2.3 Les sous-espaces de $\mathbb{R}^p$

Les droites dans $\mathbb{R}^p$

On rappelle que les droites sont les sous espaces vectoriels de dimension 1, donc engendrés par un vecteur $\boldsymbol{e} \in \mathbb{R}^p$. Ce sont aussi les noyaux de matrices à p colonnes et de rang $p-1$. En effet, par le théorème du rang, si A est une matrice de rang $p-1$, son noyau est de dimension 1.

– L' **équation paramétrique** d'une droite est $\{\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{e}, \lambda \in \mathbb{R}\}$, où $\boldsymbol{e}$ est une solution (spéciale, par exemple) du système $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.
– Les **équations cartésiennes** de cette droite sont constituées de $p-1$ équations linéaires qu'on peut par exemple obtenir en écrivant $R\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, où R est la forme échelonnée de A, qui a $n-1$ lignes non nulles.

Exemple 4.43 (Exemple dans $\mathbb{R}^3$**)** *Les équations cartésiennes d'une droite sont données par*

$$\left\{ \begin{array}{l} ax + by + cz = 0 \\ ax' + b'y + c'z = 0 \end{array} \right. , \quad \textit{avec} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} \neq 0.$$

Notons qu'une droite vectorielle est l'intersection de deux plans vectoriels distincts.

Les équations ci dessus peuvent être écrites sous la forme $A\boldsymbol{x} = 0$ *avec* $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix}$. *La droite en question est donc bien le noyau de* A. *Un vecteur directeur de cette droite est un vecteur qui est orthogonal aux deux lignes de la matrice* A *; il peut être obtenu en prenant par exemple le produit vectoriel*

$$\boldsymbol{e} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} bc' - cb' \\ ca' - ac' \\ ab' - ba' \end{bmatrix}.$$

Réciproquement on obtient facilement les équations cartésiennes à partir de l'équation paramétrique $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda \boldsymbol{e} = \lambda \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$ *: il suffit d'éliminer* λ *pour obtenir des équations cartésiennes de la droite.*

Les hyperplans dans $\mathbb{R}^p$

Proposition 4.44 *Soit* $p \geq 2$ *et* $a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{R}$ *non tous nuls. L'ensemble* F *défini par*

$$F = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^p,\ \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_p),\ \textit{tel que } x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + x_p\boldsymbol{a}_p = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$ *de dimension* $p-1$. *On dit que* F *est un* **hyperplan** *de* $\mathbb{R}^p$.

Démonstration : Soit $A = \begin{bmatrix} a_1 & \ldots & a_p \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$. Cette matrice est de rang 1. Par le théorème du rang, son noyau est de rang $p-1$, et c'est justement l'ensemble F. ∎

L'équation $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_px_p = 0$ est appelée **équation cartésienne** de l'hyperplan. Si $(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_{p-1})$ est une base de F, par exemple obtenue en calculant les solutions spéciales de $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, alors

$$\boldsymbol{x} \in F \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{f}_1 + \cdots + \lambda_{p-1}\boldsymbol{f}_{p-1}.$$

C'est l' **équation paramétrique** de F.

Proposition 4.45 (Droite et plan supplémentaires) *Si* F *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^p$, *alors* F *est un hyperplan si et seulement si il existe une droite* D *telle que* F *et* D *soient supplémentaires.*

Démonstration : Le sous espace F est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ d'équation $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_px_p = 0$ ssi $F = \mathrm{Ker}(A)$ où $A = \begin{bmatrix} a_1 & \ldots & a_p \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$. On en déduit par le théorème 4.42 que $F \oplus \mathrm{Im}(A^t) = \mathbb{R}^p$ (en fait les sous espaces F et $\mathrm{Im}(A^t)$ sont orthogonaux), et par le théorème du rang, $\dim \mathrm{Im}(A^t) = 1$: le sous-espace vectoriel $\mathrm{Im}(A^t)$ est donc une droite. La réciproque est immédiate. ∎

Exemple 4.46 (Le cas particulier d'un plan de $\mathbb{R}^3$) *On consid ère le plan $(\mathcal{P})$ dans $\mathbb{R}^3$ d'équation : $x - 2y - 3z = 0$. Ceci peut encore s'écrire $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, où $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$. Cette matrice est sous forme totalement échelonée (on l'a fait exprès...) Les solutions spéciales de $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ sont $\boldsymbol{s}_1 = (2,1,0)$ et $\boldsymbol{s}_2 = (3,0,1)$. Le plan $(\mathcal{P})$ est engendré par les vecteurs $\boldsymbol{s}_1$ et $\boldsymbol{s}_2$ L'équation paramétrique du plan est donc*

$$\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{s}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{s}_2 \text{ c.à. d. } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Notons que si l'on connaît les vecteurs $\boldsymbol{s}_1$ et $\boldsymbol{s}_2$ qui engendrent le plan, on retrouve facilement l'équation du plan en posant $(a,b,c) = \boldsymbol{s}_1 \wedge \boldsymbol{s}_2$ qui est orthogonal à $\boldsymbol{s}_1$ et $\boldsymbol{s}_2$ (le vérifier avec notre exemple).

4.2.4 Exercices

Exercice 111 (Suite de l'exercice 75) *Soit la matrice :*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) *Déterminer une base du noyau de A .*
(b) *Déterminer une base de l'image de A.*

Exercice 112 *Donner un système d'équations pour caractériser la droite de $\mathbb{R}^3$ qui passe par 0 et qui a pour vecteur directeur $(2,-1,4)$.*

Même question avec le plan de $\mathbb{R}^3$ qui passe par 0 et qui a pour vecteurs directeurs $(2,-1,4)$ et $(1,2,1)$.

Exercice 113 *Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $(1,1,1)$, $(1,0,-1)$ et $(4,2,0)$. Quelle est la dimension de F ? Faire un dessin.*
Trouver un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 114 *Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ donné par :*

$$F = \{(x,y,z), x + y + z = 0 \text{ et } 3x = 2z\}.$$

Donner une équation paramétrique de F.

Même question avec

$$G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, x + y - z = 0 \text{ et } y + 2z = t\}.$$

Exercice 115 *Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ on considère le sous-espace vectoriel F engendré par les vecteurs $\boldsymbol{f}_1 = (1,0,1,0)$, $\boldsymbol{f}_2 = (1,1,0,1)$ et $\boldsymbol{f}_3 = (1,2,0,1)$. On considère aussi le sous-espace vectoriel G engendré par $\boldsymbol{g}_1 = (1,2,-1,2)$, $\boldsymbol{g}_2 = (0,0,1,0)$, $\boldsymbol{g}_3 = (1,3,-2,3)$ et $\boldsymbol{g}_4 = (0,1,0,1)$. Vérifier que*

$$\dim(F+G) + \dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G).$$

Exercice 116 *Déterminer si les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants sont supplémentaires, en somme directe :*
$F = \{(x,y,z)$ *tels que* $x + 2y + z = 0,\ x - z = 0\}$ *et* $G = \mathrm{Vect}\{(1,a,b)\}$*, selon le choix de* $a, b \in \mathbb{R}$.
$F = \mathrm{Vect}\{(1,2,-1),(1,0,1)\}$ *et* $G = \mathrm{Vect}\{(0,1,2)\}$.
$F = \{(x,y,z)$ *tels que* $x + 2y + z = 0\}$ *et* $G = \mathrm{Vect}\{(1,0,-1)\}$.
$F = \{(x,y,z)$ *tels que* $x + 2y + z = 0\}$ *et* $G = \mathrm{Vect}\{(1,2,1)\}$.

Exercice 117 *Soient $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ des éléments de $\mathbb{R}^4$. On note F et G les sous-espaces vectoriels engendrés respectivement par $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$ et $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$. Dans quels cas a-t-on $F \oplus G = \mathbb{R}^4$?*

1. $\boldsymbol{x} = (1,1,0,0)$, $\boldsymbol{y} = (1,0,1,0)$, $\boldsymbol{u} = (0,1,0,1)$, $\boldsymbol{v} = (0,0,1,1)$
2. $\boldsymbol{x} = (-1,1,1,0)$, $\boldsymbol{y} = (0,1,-1,1)$, $\boldsymbol{u} = (1,0,0,0)$, $\boldsymbol{v} = (0,0,0,1)$
3. $\boldsymbol{x} = (1,0,0,1)$, $\boldsymbol{y} = (0,1,1,0)$, $\boldsymbol{u} = (1,0,1,0)$, $\boldsymbol{v} = (0,1,0,1)$

Exercice 118 *Soit F un sous-espace vectoriel de dimension 4 de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^7$.*
1. Soit G un sous-espace vectoriel de F orthogonal à E. Quelles sont les dimensions possibles de G ?
2. Même question si maintenant G est un supplémentaire orthogonal à F.
3. Quelle est la plus petite taille possible d'une matrice A dont l'espace des lignes est F ?
4. Dans ce cas, combien de vecteurs a une base de $\mathrm{Ker} A$, et combien de composantes ont ces vecteurs de base ?

Exercice 119 *Soit P le plan vectoriel d'équation $x - 2y - 3z = 0$ dans $\mathbb{R}^3$.*
1. Trouver la matrice $A \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ dont P est le noyau.
2. Trouver une base formée par des solutions spéciales du plan P.
3. Trouver une base de $P^{\perp}$.
4. Décomposer le vecteur $\boldsymbol{x} = (5, 4, 3)$ en $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$, où $\boldsymbol{y} \in \mathrm{Ker}(A)$ et $\boldsymbol{z} \in L(A)(= \mathrm{Im}(A^t))$.

Exercice 120 (Noyau de A^tA) *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{Ker}(A^tA) = \mathrm{Ker}(A)$.*

Exercice 121 (Base d'un hyperplan) *Soit P l'hyperplan de $\mathbb{R}^4$ déquation $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Donner une base de P et une base de la droite orthogonale à P.*

Chapitre 5

Applications linéaires

5.1 Définitions et exemples

5.1.1 Application linéaire de E dans F

Définition 5.1 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On dit qu'une application $T : E \to F$ est* **linéaire** *si*

1. *Pour tout $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E$, $T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = T(\boldsymbol{x}) + T(\boldsymbol{y})$.*
2. *Pour tout $\boldsymbol{x} \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $T(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda T(\boldsymbol{x})$.*

On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F. Si $E = F$, on parle d' **endomorphisme** *de E et on note simplement $\mathcal{L}(E,F) = \mathcal{L}(E)$.*

On remarque tout de suite que si T est une application linéaire, alors $T(\boldsymbol{0}_E) = \boldsymbol{0}_F$; en effet, $T(\boldsymbol{0}_E) = T(0_{\mathbb{K}}\boldsymbol{x}) = 0_{\mathbb{K}}T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}_F$.
L'application

$$\mathrm{Id}_E : \begin{cases} E & \to E \\ \boldsymbol{x} & \mapsto \boldsymbol{x} \end{cases}$$

est une application linéaire appelée **l'identité**.

Exemple 5.2 (Produit scalaire et norme) *Soit $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$ fixé, alors l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\boldsymbol{u} \mapsto \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{a}$ est une application linéaire. Par contre, l'application $\boldsymbol{u} \mapsto \|\boldsymbol{u}\|$ ne l'est pas.*

Exemple 5.3 (Transposition) *L'application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $A \mapsto A^t$ est une application linéaire.*

Exemple 5.4 (Dérivation et intégration) *L'application "d'erivation" de $C^1([0,1])$ dans $C([0,1])$ définie par $f \mapsto f'$ est une application linéaire. De même l'application "intégration" de $C([0,1])$ dans $C^1([0,1])$ d'efinie par $f \mapsto \int_0^x f(y)dy$ est une application linéaire.*

Proposition 5.5 (Propriétés de linéarité) *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $T : E \to F$. une application de E dans F. Alors T est une application linéaire de E dans F si et seulement si, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, et $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E$, $T(\lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{y}) = \lambda T(\boldsymbol{x}) + \mu T(\boldsymbol{y})$.*
De plus, si E est de dimension finie, $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ une base de E et T une application linéaire de E dans F, alors pour tout $\boldsymbol{x} \in E$, on a $T(\boldsymbol{x}) = x_1 T(\boldsymbol{e}_1) + \ldots x_N T(\boldsymbol{e}_N)$ où les x_i sont les composantes de $\boldsymbol{x}$ dans la base $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$.

Démonstration : Preuve laissée à titre d'exercice... ■

On déduit facilement par récurrence sur n que si T est une application linéaire de E dans F, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ et $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in E$, on a

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(\boldsymbol{x}_i). \tag{5.1.1}$$

Proposition 5.6 (L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$) *Soient E, F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. L'ensemble $\mathcal{L}(E,F)$ est un espace vectoriel. En particulier,*
- *la somme de deux applications linéaires est une application linéaire : si $S, T \in \mathcal{L}(E,F)$, alors $S+T \in \mathcal{L}(E,F)$,*
- *Le produit d'une application linéaire par un scalaire est une application linéaire : si $T \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, alors $\alpha T \in \mathcal{L}(E,F)$.*

Démonstration : On va montrer que $\mathcal{L}(E,F)$ est un espace vectoriel est un sous espace vectoriel de l'ensemble des applications de E dans F. On remarque que l'application nulle ($\boldsymbol{x} \in E \mapsto \mathbf{0}_F$) est bien un élément de $\mathcal{L}(E,F)$.
- Soient $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $S, T \in \mathcal{L}(E,F)$. On a

$$(S+T)(\lambda x+\mu y) = S(\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{y})+T(\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{y}) = \lambda S(\boldsymbol{x})+\mu S(\boldsymbol{y})+\lambda T(\boldsymbol{x})+\mu T(\boldsymbol{y}) = (S+T)(\boldsymbol{x})+\lambda(S+T)(\boldsymbol{y}).$$

  Par conséquent, $S+T \in \mathcal{L}(E,F)$.
- Soient $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E$ et $\alpha, \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $T \in \mathcal{L}(E,F)$. On a

$$(\alpha T)(\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{y}) = \alpha T(\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{y}) = \mu\left(\lambda T(\boldsymbol{x})+\mu T(\boldsymbol{y})\right) = \lambda(\alpha T)(x)+\mu(\alpha T)(y).$$

  Par conséquent, $\alpha T \in \mathcal{L}(E,F)$.

■

Proposition 5.7 (Composée de deux applications linéaires) *Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. La composée de deux applications linéaires est une application linéaire : si $S \in \mathcal{L}(F,G)$, $T \in \mathcal{L}(E,F)$, alors $S \circ T \in \mathcal{L}(E,G)$ avec $S \circ T(\boldsymbol{x}) = S(T(\boldsymbol{x})), \forall \boldsymbol{x} \in E$.*

Démonstration : Soient $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Si $S \in \mathcal{L}(F,G)$, $T \in \mathcal{L}(E,F)$, on a

$$S\circ T(\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{y}) = S\left(T(\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{y})\right) = S\left(\lambda\underbrace{T(\boldsymbol{x})}_{\in F}+\mu\underbrace{T(\boldsymbol{y})}_{\in F}\right) = \lambda S(T(\boldsymbol{x}))+\mu S(T(\boldsymbol{y})) = \lambda S\circ T(\boldsymbol{x})+\mu S\circ T(\boldsymbol{y}).$$

Par conséquent, $S \circ T \in \mathcal{L}(E,G)$. ■

Attention, en général, les applications linéaires ne commutent pas (comme les matrices...) : si $S \in \mathcal{L}(E)$ et $T \in \mathcal{L}(E)$,

$$S \circ T \neq T \circ S.$$

Prendre par exemple $E = \mathbb{R}^2$ et $S(x_1,x_2) = (x_1+x_2, x_2)$ et $T(x_1,x_2) = (0,x_2)$.

5.1.2 Image, noyau et rang

Définition 5.8 *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit T une application linéaire de E dans F. On appelle*
- **Noyau de** *T l'ensemble noté $\mathrm{Ker}T$ defini par*

$$\mathrm{Ker}T = \{\boldsymbol{x} \in E \text{ tel que } T(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_F\}.$$

- **Image de** *T l'ensemble noté $\mathrm{Im}T$ defini par*

$$\mathrm{Im}T = \{\boldsymbol{y} \in F \text{ tel qu'il existe } \boldsymbol{x} \in E \text{ tel que } \boldsymbol{y} = T(\boldsymbol{x})\}.$$

Proposition 5.9 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit T une application linéaire de E dans F. L'espace $\mathrm{Ker}T$ est un sous-espace vectoriel de E et l'espace $\mathrm{Im}T$ est sous-espace vectoriel de F.*

Démonstration :
- On sait que $T(\mathbf{0}_E) = \mathbf{0}_F$. Donc $\mathbf{0}_E \in \mathrm{Ker}T$. Pour montrer que $\mathrm{Ker}T$ est un sous-espace vectoriel de E, il reste donc à montrer que pour tous $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathrm{Ker}T$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a $\lambda\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in \mathrm{Ker}T$.

$$T(\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{y}) = \lambda T(\boldsymbol{x})+\mu T(\boldsymbol{y}) = \lambda\mathbf{0}_F+\mu\mathbf{0}_F = \mathbf{0}_F.$$

  Par conséquent, $\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{y} \in \mathrm{Ker}T$.

– Soient $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in \mathrm{Im}T \subset F$. Il existe $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in E$ tels que $\boldsymbol{y}_1 = T(\boldsymbol{x}_1)$ et $\boldsymbol{y}_2 = T(\boldsymbol{x}_2)$. On remarque alors que

$$T(\lambda \boldsymbol{x}_1 + \mu \boldsymbol{x}_2) = \lambda T(\boldsymbol{x}_1) + \mu T(\boldsymbol{x}_2) = \lambda \boldsymbol{y}_1 + \mu \boldsymbol{y}_2.$$

Donc $\lambda \boldsymbol{y}_1 + \mu \boldsymbol{y}_2 \in \mathrm{Im}T$.

■

Définition 5.10 *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit T une application linéaire de E sur F. On appelle* **rang de** *T la dimension de l'espace vectoriel $\mathrm{Im}(T)$ et on le note $\mathrm{rg}(T)$.*

On donne maintenant le théorème du rang pour les applications linéaires. Il peut se démontrer à partir de celui sur les matrices (voir remarque 5.18 plus loin) mais on donne ici une démonstration directe, sans passer par les matrices.

Théorème 5.11 (Théorème du rang) *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $T \in \mathcal{L}(E, F)$, on a*

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)).$$

Démonstration : Soient $(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_p)$ une base de $\ker T$ et $(\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_q)$ une base de $\mathrm{Im}(T)$. On veut montrer que $p + q = \dim(E)$. Soient $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_q \in E$ les antécédents de $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_q$ par T : $T(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{w}_i$. Montrons que la famille $(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_p, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_q)$ est une base de E. Si c'est le cas on aura bien montré que $p + q = \dim(E)$.

– Montrons que la famille $(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_p, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_q)$ est libre. Supposons $\alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \ldots + \alpha_p \boldsymbol{u}_p + \beta_1 \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \beta_q \boldsymbol{v}_q = \mathbf{0}_E$. On a alors

$$T\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \boldsymbol{u}_i + \sum_{i=1}^{q} \beta_i \boldsymbol{u}_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i T(\boldsymbol{u}_i) + \sum_{i=1}^{q} \beta_i T(\boldsymbol{v}_i) = \mathbf{0}_F,$$

et comme $T(\boldsymbol{u}_i) = \mathbf{0}_F$ et $T(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{w}_i$,

$$\sum_{i=1}^{q} \beta_i \boldsymbol{w}_i = \mathbf{0}_F,$$

Mais $(\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_q)$ est une base de $\mathrm{Im}(T)$, c'est donc une famille libre. On en déduit $\beta_i = 0$ pour tout $i = 1, \ldots, q$. On écrit alors que $\alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \ldots + \alpha_p \boldsymbol{u}_p = \mathbf{0}_E$, et comme la famille $(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_p)$ est libre, on a aussi $\alpha_1 = \ldots = \alpha_p = 0$.

– Montrons maintenant que la famille $(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_p, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_q)$ est génératrice. Soit $\boldsymbol{x} \in E$, et $\boldsymbol{y} = T(\boldsymbol{x}) \in \mathrm{Im}(T)$. On a donc $\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{q} \gamma_i \boldsymbol{w}_i$, où les sont les γ_i sont les composantes de $\boldsymbol{y}$ dans la base $(\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_q)$. Posons alors

$$\boldsymbol{x}_I = \sum_{i=1}^{q} \gamma_i \boldsymbol{v}_i \text{ et } \boldsymbol{x}_K = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_I.$$

Par linéarité, on a

$$T(\boldsymbol{x}_K) = T(\boldsymbol{x}) - T(\boldsymbol{x}_I) = \boldsymbol{y} - \sum_{i=1}^{q} \gamma_i T(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{y} - \sum_{i=1}^{q} \gamma_i \boldsymbol{w}_i = \mathbf{0}_F,$$

et donc $\boldsymbol{x}_K \in \ker T$. On en déduit que

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_K + \sum_{i=1}^{q} \gamma_i \boldsymbol{v}_i,$$

et comme $\boldsymbol{x}_K$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_p$, la famille $(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_p, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_q)$ est génératrice.

■

Proposition 5.12 *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soit T une application linéaire de E dans F.*

– *L'application T est* **injective** *si et seulement si $\mathrm{Ker}T = \{\mathbf{0}_E\}$.*
– *L'application T est* **surjective** *si et seulement si $\mathrm{Im}T = F$.*
– *L'application T est* **bijective** *si et seulement si $\mathrm{Ker}T = \{\mathbf{0}_E\}$* **et** *$\mathrm{Im}T = F$. On parle alors d'* **isomorphisme**, *et d'* **automorphisme** *si $F = E$.*

Démonstration :

– L'application T est injective si et seulement si pour tous $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E$ tels que $T(\boldsymbol{x}) = T(\boldsymbol{y})$ alors $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$, c.à.d. si et seulement si $T(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = 0_F$ implique $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = 0_E$, soit encore si et seulement si $T(\boldsymbol{z}) = \mathbf{0}_F$ implique $\boldsymbol{z} = \mathbf{0}_E$, ce qui équivaut à $\mathrm{Ker}T = \{\mathbf{0}_E\}$.
– L'application T est surjective si et seulement si pour tout $\boldsymbol{y} \in F$, il existe $\boldsymbol{x} \in E$ tel que $T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$, c.à.d. si et seulement si $F = \mathrm{Im}T$.
– Par conséquent, T est bijective si et seulement si $\mathrm{Ker}T = \{\mathbf{0}_E\}$ et $\mathrm{Im}T = F$.

■

On déduit alors du théorème du rang que :

$$\boxed{\text{Si } \dim(E) = \dim(F),\ T \text{ bijective} \Leftrightarrow T \text{ injective} \Leftrightarrow T \text{ surjective}}$$

5.1.3 Exercices

Exercice 122 (Applications linéaires ou non ?) *1. Déterminer parmi les applications définies de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes, celles qui sont linéaires :*

1. $\Pi_1(x, y) = x$, $\Pi_2(x, y) = y$,
2. $T_1(x, y) = xy$, $T_2(x, y) = x + y$, $T_3(x, y) = x + y + 1$, $T_4(x, y) = x^2 - y^2$,
3. $T_5(x, y) = |x + y|$, $T_6(x, y) = \sin x, T_7(x, y) = x - 3y$.

2. Déterminer parmi les applications définies de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ suivantes, celles qui sont linéaires : $S_1(x, y) = (y, x)$, $S_2(x, y) = (x, y^2)$, $S_3(x, y) = (1, x)$.

Exercice 123 (Applications $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$) *Parmi les applications T de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ ou dans $\mathbb{R}$ suivantes, quelles sont celles qui satisfont $T(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda T(\boldsymbol{x})$, et quelles sont celles qui satisfont $T(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = T(\boldsymbol{x}) + T(\boldsymbol{y})$?*

$$T(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|} \quad T(\boldsymbol{x}) = x_1 + x_2 \quad T(\boldsymbol{x}) = (2x_1, 3x_2) \quad T(\boldsymbol{x}) = \max(x_1, x_2)$$

Exercice 124 (Application linéaire dans $\mathbb{R}^2$) *Soit T une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que $T(1, 1) = (2, 2)$, $T(2, 0) = (0, 0)$. Déterminer $T(\boldsymbol{u})$ pour les vecteurs $\boldsymbol{u}$ suivants :*

$$\boldsymbol{u} = (2, 2) \quad \boldsymbol{u} = (3, 1) \quad \boldsymbol{u} = (-1, 1) \quad \boldsymbol{u} = (a, b)$$

Exercice 125 *Dans $\mathbb{R}^3$ vérifier que les vecteurs suivants forment une base :*

$$\boldsymbol{a} = (4, 2, 0), \qquad \boldsymbol{b} = (1, 2, -3), \qquad \boldsymbol{c} = (0, 2, 5)$$

Trouver les images de la base canonique par l'application linéaire $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$T(\boldsymbol{a}) = 2, \qquad T(\boldsymbol{b}) = -7, \qquad T(\boldsymbol{c}) = -1,$$

Exercice 126 (Composition d'applications linéaires) *Soient S et T les deux applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définies par :*

$$S(x, y) = (4x - y, x - y) \qquad \textit{et} \qquad T(x, y) = (x + y, 2x - y).$$

Calculer $S \circ T$ et $T \circ S$. Et vérifier (rapidement !) que ces applications sont linéaires.

Exercice 127 *Soient S et T les deux applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définies par :*

$$S(x, y) = (x + y, x) \qquad \textit{et} \qquad T(x, y) = (5x - 4y, 6x + 5y).$$

Montrer que ce sont des automorphismes de $\mathbb{R}^2$ (c.à.d. des applications linéaires bijectives de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$).

Exercice 128 (Linéarité et continuité) *Vérifier qu'une application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est continue.*
Soit T une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$T(x + y) = T(x) + T(y) \qquad \textit{pour tout } x, y \in \mathbb{R}.$$

Montrer que T est linéaire.

Exercice 129 (Noyau et image d'applications linéaires) *Pour chacune des applications linéaires T suivantes, répondre aux questions suivantes :*

1. *Vérifier que l'application T est linéaire.*
2. *Déterminer le noyau et l'image de T. Donner la dimension et une base de chacun des sous-espaces.*

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $T(x, y) = (3x + y, x - y)$.
(b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $T(x, y) = (x + 2y, 2x + 4y)$.
(c) $T_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $T_\alpha(x, y) = (x + \alpha y, 2 + 4y)$, (selon les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$).
(d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $T(x, y, z) = (z, y, 0)$.
(e) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $T(x, y, z) = (x - y, x + y, x + 2y)$.

Exercice 130 (Image réciproque) *Déterminer l'application linéaire $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ telle que, si $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ désignent les vecteurs de la base canonique, on ait :*

$$T(\boldsymbol{e}_1) = (1, 1), \qquad T(\boldsymbol{e}_2) = (0, 1), \qquad T(\boldsymbol{e}_3) = (-1, 1).$$

Trouver une base de $\mathrm{Ker}(T)$.
Quelle est l'image réciproque du vecteur $(1, 0)$?
Quelle est l'image réciproque du sous espace vectoriel engendré par $(1, 0)$?

Exercice 131 *On considère l'application linéaire T de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^6$ donnée par :*

$$\begin{aligned}
T(1, 0, 0, 0) &= (-1, -1, -1, 0, 0, 0) \\
T(0, 1, 0, 0) &= (1, 0, 0, -1, -1, 0) \\
T(0, 0, 1, 0) &= (0, 1, 0, 1, 0, -1) \\
T(0, 0, 0, 1) &= (0, 0, 1, 0, 1, 1)
\end{aligned}$$

Déterminer l'image d'un vecteur (x_1, x_2, x_3, x_4) de $\mathbb{R}^4$. Déterminer le rang de T.

5.2 Applications linéaires et matrices

5.2.1 Matrice d'une application linéaire

Définition 5.13 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension p et n. On se donne $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_p)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n)$ une base de F. Soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle* **matrice de** T **dans les bases** $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ *la matrice notée $\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(T) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les coefficients de la $j^{ème}$ colonne sont les composantes de $T(\boldsymbol{e}_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$:*

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(T) = (a_{i,j}), \text{ avec } T(\boldsymbol{e}_j) = a_{1,j}\boldsymbol{f}_1 + \cdots + a_{n,j}\boldsymbol{f}_n.$$

Si $E = F$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ on notera simplement $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(T)$.

Proposition 5.14 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension p et n. On se donne $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_p)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n)$ une base de F. Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors il existe une unique application linéaire $T \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $M = \mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(T)$.*

Proposition 5.15 *Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. On se donne $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_p)$ une base de E, $\mathcal{B}' = (\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n)$ une base de F et $\mathcal{B}'' = (\mathcal{B}' = (\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_q))$ une base de G. Soit $R \in \mathcal{L}(E, F)$, $S \in \mathcal{L}(E, F)$, $T \in \mathcal{L}(F, G)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a*

1. $\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(R + S) = \mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(R) + \mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(S)$.
2. $\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\lambda R) = \lambda \mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(R)$.
3. $\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(T \circ R) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(T) \cdot \mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(R)$.

Corollaire 5.16 *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension n, $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{B}'$ une base de F, et $T \in \mathcal{L}(E, F)$ inversible. Alors*

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(T^{-1}) = \left(\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(T)\right)^{-1}.$$

Réciproquement, si $\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(T)$ est inversible, alors T est inversible.

Démonstration : Pour le sens direct, on applique la proposition précédente : on a $\mathrm{Id}_n = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(T \circ T^{-1}) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) \cdot \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f^{-1})$. Pour la réciproque, soit $S \in \mathcal{L}(F, E)$ telle que $\mathrm{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(S) = (\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(T))^{-1}$ (l'existence de S est assurée par la Proposition 5.14). On a alors $\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T \circ S) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(S)\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(t) = \mathrm{Id}_n$. Par la Proposition 5.14), le seul endomorphisme de matrice Id_n dans la base $\mathcal{B}$ est l'application identité. Donc $S \circ T = \mathrm{Id}_E$. De même, $T \circ S = \mathrm{Id}_F$. Donc T est inversible. ■

Lemme 5.17 *Soient E et F des espaces vectoriels de dimensions respectives p et n, et T une application linéaire de E dans F. Soient $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_p)$ une base de E, $\mathcal{B}' = (\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n)$ une base de F et A la matrice de T dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Alors $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = \dim(\mathrm{Ker}(T))$ et $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(T)$.*

Démonstration : Montrons par exemple la première égalité. Soit $(\boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_q)$ une base de $\mathrm{Ker}(A)$ et notons $X_j = (s_{1,j}, \ldots, s_{p,j}) \in \mathbb{R}^p$ pour $1 \le j \le q$, où les scalaires $s_{1,j}$ sont les composantes de $\boldsymbol{s}_j$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$. On définit $\boldsymbol{a}_j := \sum_{i=1}^n s_{i,j}\boldsymbol{e}_i$ pour $1 \le j \le q$. Alors pour tout $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, on a

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} = 0 \Leftrightarrow \forall i = 1, \ldots, n, \sum_{j=1}^p a_{i,j}x_j = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^p a_{i,j}x_j)\boldsymbol{f}_i = 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{j=1}^p (\sum_{i=1}^n a_{i,j}\boldsymbol{f}_i)x_j = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^p x_j T(\boldsymbol{e}_j) = 0 \Leftrightarrow T(\sum_{j=1}^p x_j\boldsymbol{e}_j) = 0. \end{aligned} \tag{5.2.2}$$

Donc $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}(A)$ ssi $T(\boldsymbol{a}) = 0$ avec $\boldsymbol{a} = \sum_{j=1}^p x_j\boldsymbol{e}_j$. En particulier, la famille $(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_q)$ est contenue dans $\mathrm{Ker}(A)$. On vérifie comme ci-dessus que si $\lambda_1, \ldots, \lambda_q \in \mathbb{K}$, alors $\sum_{i=1}^q \lambda_i\boldsymbol{s}_i = 0$ ssi $\sum_{i=1}^q \lambda_i\boldsymbol{a}_i = 0$. Donc la famille $(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_q)$ est libre. Par le même argument, pour tout $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots x_p) \in \mathbb{R}^p$, $(\boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_q, \boldsymbol{x})$ est libre ssi $(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_q, \boldsymbol{a})$ est libre, où $\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^p x_i\boldsymbol{e}_i$. On en déduit que la famille $(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_q)$ est génératrice de $\mathrm{Ker}(A)$. Finalement, $(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_q)$ est une base de $\mathrm{Ker}(A)$, donc $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = q$. On montre de même que $\dim(\mathrm{Im}(A)) = \dim(\mathrm{Im}(T))$. Le théorème est démontré. ■

Remarque 5.18 (Théorèmes du rang pour les applications linéaires et pour les matrices) *Par le lemme précédent, on démontre facilement le théorème du rang pour les applications linéaires (théorème 5.11), à partir du théorème du rang pour les matrices. En effet, supposons que T est une application linéaire de E dans F, et soient $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_p)$ une base de E, $\mathcal{B}' = (\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n)$ une base de F et A la matrice de T dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$; alors, par le théorème 4.39 on a : $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(A)) + \mathrm{rg}(A)$. On en déduit par le lemme ci-dessus que $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(T)) + \mathrm{rg}(T)$.*

5.2.2 Changement de bases

Définition 5.19 *Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, alors $\mathrm{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)$ s'appelle la matrice de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.*

Les colonnes de la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ sont constitués des coordonnées des éléments de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$. Par le Corollaire 5.16, on a $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = (P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}})^{-1}$.

Théorème 5.20 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $\boldsymbol{x} \in E$. Alors si X et X' désignent les composantes de $\boldsymbol{x}$ dans respectivement la base $\mathcal{B}$ et la base $\mathcal{B}'$ et si $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ désigne la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, alors $X = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}X'$.*

Théorème 5.21 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $T \in \mathcal{L}(E)$, alors si $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ désigne la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, on a*

$$\boxed{\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(T) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(T)P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(T)P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}.}$$

On a aussi

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(T) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(T) = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(T) \text{ et } \mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(T) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(T)P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}.$$

$$
\begin{tikzcd}
(E,\mathcal{B}') \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_E"'] & (E,\mathcal{B}') \\
(E,\mathcal{B}) \arrow[r, "T"'] & (E,\mathcal{B}) \arrow[u, "\mathrm{Id}_E"']
\end{tikzcd}
\quad \Leftrightarrow \quad
\begin{tikzcd}
(E,\mathcal{B}') \arrow[r, "\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(T)"] \arrow[d, "P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}"'] & (E,\mathcal{B}') \\
(E,\mathcal{B}) \arrow[r, "\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(T)"'] & (E,\mathcal{B}) \arrow[u, "P^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}=P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
(E,\mathcal{B}) \arrow[r, "T"] \arrow[d, "T"'] & (E,\mathcal{B}') \\
(E,\mathcal{B}) \arrow[ur, "\mathrm{Id}_E"'] &
\end{tikzcd}
\quad \Leftrightarrow \quad
\begin{tikzcd}
(E,\mathcal{B}) \arrow[r, "\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(T)"] \arrow[d, "\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(T)"'] & (E,\mathcal{B}') \\
(E,\mathcal{B}) \arrow[ur, "P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}"'] &
\end{tikzcd}
$$

5.2.3 Exercices

Exercice 132 (Changement de base) *Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs*

$$\boldsymbol{a} = (1,0,1), \qquad \boldsymbol{b} = (1,-1,1), \qquad \boldsymbol{c} = (1,2,-1).$$

1. Soit T une application linéaire T telle que $T(\boldsymbol{a}) = (2,3,-1)$, $T(\boldsymbol{b}) = (3,0,-2)$, $T(\boldsymbol{c}) = (2,7,-1)$. Pour $(x,y,x) \in \mathbb{R}^3$, exprimer $T(x,y,z)$ en fonction de (x,y,z).
2. Même question pour l'application linéaire $\tilde{T}$ telle que $\tilde{T}(\boldsymbol{a}) = 2\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}$, $\quad \tilde{T}(\boldsymbol{b}) = 2\boldsymbol{c}$, $\quad \tilde{T}(c) = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$.
3. Déterminer le noyau et l'image de ces deux applications linéaires ainsi que des bases de ces sous espaces.

Exercice 133 (Isomorphisme) *Soit $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par :*

$$T(1,0,0) = (1,1), \qquad T(0,1,0) = (0,1), \qquad T(0,0,1) = (-1,1).$$

Trouver une base de $\mathrm{Ker}(T)$. Déterminer un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(T)$ dans $\mathbb{R}^3$ et vérifier qu'il est isomorphe à $\mathrm{Im}(T)$ (c.à.d qu'il existe un isomorphisme, i.e. une application linéaire bijective du supplémentaire de $\mathrm{Ker}(T)$ dans $\mathrm{Im}(T)$)

Exercice 134 (Famille d'applications linéaires de $\mathbb{R}^3$) *Soit m un paramètre réel. On considère l'endomorphisme T_m de $\mathbb{R}^3$ (c.à.d. une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$) defini par $T_m(x,y,z) = (X,Y,Z)$ avec :*

$$\left\{\begin{array}{lcllllll} X & = & (m-2)x & + & 2y & - & z \\ Y & = & 2x & + & my & + & 2z \\ Z & = & 2mx & + & 2(m+1)y & + & (m+1)z \end{array}\right.$$

Montrer que le rang de T_m est égal à 3 sauf pour des valeurs particulières de m que l'on déterminera. Pour ces valeurs particulières, préciser la valeur du rang et donner les équations cartésiennes des sous espaces $\mathrm{Ker}(T_m)$ et $\mathrm{Im}(T_m)$ ainsi que des bases de chacun d'eux.

Exercice 135 (Application linéaire sur un espace des matrices) *Soit E l'espace vectoriel des matrices réelles 2×2. Dans cet espace on considère le vecteur (au sens élément de l'espace vectoriel, qui est donc ici une matrice) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.*
On va considérer l'endomorphisme S de E (application linéaire de E dans E) donné par la multiplication (à gauche) par P. C'est à dire $T(A) = PA$. (Vérifier que c'est bien une application linéaire).
On rappelle que la base canonique de E est l'ensemble des matrices :

$$\mathcal{B} = \left\{ M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Quelles sont les images des matrices M_i par l'application T ? En déduire alors la matrice de l'application T dans la base $\mathcal{B}$ (qui est donc une matrice 4×4 ; pourquoi ?)
Faire la même chose pour l'endomorphisme $\tilde{T}$ de E qui est la multiplication à droite par P.

Matrice d'une application linéaire, changement de bases

Exercice 136 (Changements de base) *On considère l'application linéaire $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $T(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$.*

1. *Ecrire la matrice A de l'application linéaire T dans la base $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ canonique.*
2. (a) *Montrer que la famille de vecteurs $\mathcal{B}' = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2)$ avec $\boldsymbol{e}'_1 = (0, 1)$, $\boldsymbol{e}'_2 = (1, 0)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.*
   (b) *Ecrire la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ et calculer son inverse P^{-1}.*
   (c) *Ecrire la matrice A' de l'application linéaire T dans la base $\mathcal{B}'$.*
   (d) *Vérifier que $A' = P^{-1}AP$.*
3. *Mêmes questions avec la famille de vecteurs $\mathcal{B}'' = (\boldsymbol{e}''_1, \boldsymbol{e}''_2)$ avec $\boldsymbol{e}'_1 = (1, 1)$, $\boldsymbol{e}''_2 = (1, -1)$*

Exercice 137 (Changements de base, encore...)
1. On considère l'application linéaire $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$T(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, x_1).$$

1. *Ecrire la matrice A de l'application linéaire T dans la base $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ canonique.*
2. *Montrer que la famille de vecteurs $\mathcal{B}' = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2)$ avec $\boldsymbol{e}'_1 = (2, 1)$, $\boldsymbol{e}'_2 = (1, -1)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.*
3. *Ecrire la matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_2)$ de l'application identique de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}')$ dans$(\mathbb{R}^2, \mathcal{B})$.*
4. *En déduire la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ et calculer son inverse P^{-1}.*
5. *Ecrire la matrice A' de l'application linéaire T dans la base $\mathcal{B}'$.*
6. *Vérifier que $A' = P^{-1}AP$.*

2. Mêmes questions avec l'application $\tilde{T} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ définie par $\tilde{T}(x_1, x_2) = (\cos\theta x_1 + \sin\theta x_2, -\sin\theta x_1 + \cos\theta x_2)$, et $\boldsymbol{e}'_1 = (1, i)$, $\boldsymbol{e}'_2 = (1, -i)$.

Exercice 138 (Changements de base, toujours...) *Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs*

$$\boldsymbol{u} = (1, -1, 0), \qquad \boldsymbol{v} = (1, 1, 1), \qquad \boldsymbol{w} = (0, 1, 1).$$

1. Montrer que la famille $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ forme une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$.
2. Ecrire la matrice de passage P de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Calculer P^{-1}.

3. On considère l'application linéaire T définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$T(x, y, z) = (x + 3y - 3z, x - y + z, x + y - z).$$

3.a. Déterminer la matrice de T dans la base canonique.
3.b. Déterminer la matrice de T dans la base $\mathcal{B}'$.
3.c. Déterminer $\mathrm{Ker}(T)$. Quelle est sa dimension ?
3.d. En déduire le rang de T et donner une base de $\mathrm{Im}(T)$.

5.3 Applications linéaires remarquables : formes linéaires, projecteurs

5.3.1 Homothéties

Définition 5.22 *Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on appelle* **homothétie** *de rapport λ l'endomorphisme $T_\lambda \in \mathcal{L}(E)$ qui à tout $x \in E$ associe $T_\lambda(x) = \lambda x$.*

Proposition 5.23 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Pour toute base $\mathcal{B}$, la matrice d'une homothétie T_λ de rapport λ est donnée par*

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(T_\lambda) = \lambda \mathrm{Id}_n.$$

Démonstration : Il suffit d'écrire que pour tout élément $\boldsymbol{e}$ de la base $\mathcal{B}$, $H(\boldsymbol{e}) = \lambda \boldsymbol{e}$. ■

5.3.2 Formes linéaires

Définition 5.24 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle forme linéaire sur E, une application de $\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$.*

Proposition 5.25 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et T une forme linéaire sur E. Soit $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$ une base de E, il existe $(\alpha_1,\ldots\alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que pour tout $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$ on ait*

$$T(\boldsymbol{x}) = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n.$$

Notons que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $f(\boldsymbol{x})$ est le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$ des deux vecteurs $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ et $(x_1,\ldots,x_n)$. Attention de ne pas confondre le vecteur $\boldsymbol{x} \in E$ et le vecteur $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Démonstration : On note $\alpha_i = f(\boldsymbol{e}_i)$. On a donc

$$T(x) = T(x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n) = x_1 T(\boldsymbol{e}_1) + \cdots + x_n T(\boldsymbol{e}_n) = x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n.$$

Proposition 5.26 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et T une forme linéaire non nulle sur E. On a $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 1$ et $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = n-1$.*

Démonstration : On sait que $\mathrm{Im}(T)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}$ non réduit à $\{0\}$. Par conséquent $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{K}$. On en déduit que $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 1$ et par le théorème du rang que $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = n-1$ ■

Ainsi, le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E est un hyperplan de E. Réciproquement, si F est un hyperplan de E, il existe une forme linéaire non nulle sur E dont le noyau est F.

Exemple 5.27 (Forme linéaire de $\mathbb{R}^3$) *La forme linéaire définie par $T(x,y,z) = x+y+z$ peut aussi s'écrire $A\boldsymbol{x} = 0$ avec $A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}$ et $\boldsymbol{x} = (x,y,z)$ et on a déjà vu que le noyau de A est l'hyperplan d'équation $x+y+z=0$. La forme linéaire T a donc aussi pour noyau le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x+y+z=0$.*

5.3.3 Projecteur

Définition 5.28 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur si $p \circ p = p$.*

Si E est un ensemble et F un sous-ensemble de E, et si T est une application de E dans un ensemble G, on appelle restriction de T au sous ensemble F l'application de F dans G qui à $u \in F$ associe $T(u) \in G$. On note $T_{|_F}$ cette restriction. C'est donc la même application que T, sauf qu'on la considère maintenant sur un espace de départ plus petit. L

Proposition 5.29 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Si $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur alors*
- *$E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$.*
- *$T_{|_{\mathrm{Im}(p)}} = \mathrm{Id}_{\mathrm{Im}(p)}$, où $\mathrm{Id}_{\mathrm{Im}(p)}$ désigne l'endomorphisme identité sur l'espace vectoriel $\mathrm{Im}(p)$.*

On dit aussi que p est une projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$:

$$\forall x \in E,\ x = x_{\mathrm{Im}} + x_{\mathrm{Ker}},\ \textit{ avec } x_{\mathrm{Im}} \in \mathrm{Im}(p),\ x_{\mathrm{Ker}} \in \mathrm{Ker}(p) \textit{ et } p(x) = x_{\mathrm{Im}}.$$

Démonstration : Soit $x \in E$ on peut écrire $x = p(x) + x - p(x)$. Il est clair que $p(x) \in \mathrm{Im}(p)$ et $x - p(x) \in \mathrm{Ker}(p)$ car $p(x - p(x)) = p(x) - p^2(x) = 0$. On en déduit que $\mathrm{Im}(p) + \mathrm{Ker}(p) = E$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p)$, on a $x = p(y)$ et $p(x) = 0$ ou encore $p(p(y)) = p(y) = 0 = x$. On en déduit que $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont supplémentaires dans E. De plus, si $x \in \mathrm{Im}(p)$, $x = p(y)$ et $p(x) = p^2(y) = p(y) = x$. Donc $p_{|_{\mathrm{Im}(p)}} = \mathrm{Id}_{\mathrm{Im}(p)}$. ■

Exemples dans $\mathbb{R}^3$
- Projection p sur une droite $\mathcal{D}$ de vecteur directeur $\boldsymbol{f}_1$: $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 1$. Il existe alors deux vecteurs $\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$ linéairement indépendants de $\mathrm{Ker}(p)$ tel que $\mathcal{B}' = (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$. De plus

$$M_{\mathcal{B}'}(p) = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Exemple 5.30 *si $\boldsymbol{f}_1 = (1,-1,0)$, $\boldsymbol{f}_2 = (0,1,1)$ $\boldsymbol{f}_3 = (1,0,-1)$, la matrice de cette projection dans la base canonique est donnée par*

$$M_{\mathcal{B}}(p) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

En effet, $M_{\mathcal{B}}(p) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} M_{\mathcal{B}'}(p) P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ avec

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ et } P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

– Projection p sur un plan $\mathcal{P}$ parallèlement à une droite $\mathcal{D}$. On note $(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2)$ une base de $\mathcal{P}$ et $\boldsymbol{f}_3$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. La famille $\mathcal{B}' = (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3)$ est alors une base de $\mathbb{R}^3$ et

$$M_{\mathcal{B}'}(p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exemple 5.31 *si $\boldsymbol{f}_1 = (1,-1,0)$, $\boldsymbol{f}_2 = (0,1,1)$ $\boldsymbol{f}_3 = (1,0,-1)$, la matrice de cette projection dans la base canonique est donnée par*

$$M_{\mathcal{B}}(p) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

5.3.4 Symétrie

Définition 5.32 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que $S \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie si $S \circ S = \mathrm{I}d$.*

Exemples dans $\mathbb{R}^3$

– Symétrie S par rapport à un plan $\mathcal{P}$ parallèlement à une droite $\mathcal{D}$. On note $(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2)$ une base de $\mathcal{P}$ et $\boldsymbol{f}_3$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. La famille $\mathcal{B}' = (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3)$ est alors une base de $\mathbb{R}^3$ et

$$M_{\mathcal{B}'}(S) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Exemple 5.33 *si $\boldsymbol{f}_1 = (1,-1,0)$, $\boldsymbol{f}_2 = (0,1,1)$ $\boldsymbol{f}_3 = (1,0,-1)$, la matrice de cette projection dans la base canonique est donnée par*

$$M_{\mathcal{B}}(S) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

– On remarquera que $-S$ est alors la symétrie par rapport à la droite $\mathcal{D}$ parallèlement au plan $\mathcal{P}$.

5.3.5 Exercices

Exercice 139 (Homothétie) *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $a \in \mathbb{K}$ donné. On considère l'homothétie de rapport a $H_a : E \to E$ définie par $H_a(x) = ax, \forall x \in E$.*
1. Vérifier que $H_a \in \mathcal{L}(E)$.
2. Montrer que H_a est un automorphisme de E si et seulement si $a \neq 0$. Calculer alors H_a^{-1}.
3. Calculer $H_a \circ H_b$, avec $\beta \in \mathbb{K}$.

Exercice 140 (Homothétie) *Soient E un espace vectoriel et T un endomorphisme de E. Montrer que, si la famille $\{x, T(x)\}$ est liée pour tout $x \in E$ alors T est une homothétie, c'est-à-dire il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $T(x) = \lambda x$ pour tout $x \in E$.*

Exercice 141 (Endomorphisme nilpotent) *Soit E un espace vectoriel et T un endomorphisme de E tel que$T^2 = 0$.*

1. *Montrer que* $\mathrm{Im}(T) \subset \mathrm{Ker}(T)$.
2. *Montrer que* $\mathrm{Id}_E + T$ *est un automorphisme de* E.

Exercice 142 (CNS pour un projecteur) *Soit T une application linéaire du $\mathbb{R}-$espace vectoriel E sur lui-même. Montrer que $T^2 = Id$ si et seulement si $\frac{1}{2}(T + \mathrm{Id}_E)$ est un projecteur.*

Exercice 143 (Image d'un projecteur) *Soient p et q deux projecteurs de E un $\mathbb{K}$-e.v. Montrer que p et q ont même image si et seulement si $p \circ q = q$ et $q \circ p = p$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que p et q aient même direction, c.a.d. même noyau.*

Exercice 144

1. *Soit T une application linéaire sur E de dimension finie. Montrer que les propriétés (1) à (3) sont équivalentes.*

   $$(1) \qquad E = \mathrm{Im}(T) \oplus \mathrm{Ker}(T)$$

   $$(2) \qquad \mathrm{Im}(T) = \mathrm{Im}(T^2)$$

   $$(3) \qquad \mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Ker}(T^2)$$

   Indications : Si vous souhaitez montrer $(2) \Rightarrow (1)$ vous pourrez considérer la restriction de T au sev $\mathrm{Im}(T)$. Si vous souhaitez montrer $(2) \Rightarrow (3)$ il peut être utile d'utiliser la formule du rang.
2. *Donner un exemple d'application linéaire T vérifiant Im T = Im T^2 et qui ne soit pas un projecteur.*

Chapitre 6

Déterminants

Le déterminant d'une matrice carrée est un nombre réel ou complexe, selon que l'on considère les matrices réelles ou complexes. Il n'est défini *que* pour les matrices carrées. C'est donc une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$. On a déjà défini le déterminant (définition 1.11) d'une matrice carrée d'ordre 2.

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ son déterminant est } \det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

De plus, on a vu qu'une matrice 2×2 est inversible (exercice 43) si et seulement si $\det(A) \neq 0$, et dans ce cas son inverse est

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

En fait, le déterminant est un excellent test pour l'inversibilité des matrices ; dans le cas général d'une matrice $A \in$, on aura : Certains d'entre vous ont peut-être déjà vu des formules donnant le déterminant d'une matrice carrée d'ordre n, soit par une formule de récurrence, soit par une formule portant sur les permutations.
Nous les verrons par la suite, mais, pour plus de clarté, nous allons commencer par définir le déterminant par trois propriétés fondamentales, desquelles découlent toutes les autres.

6.1 Propriétés du déterminant

6.1.1 Les trois propriétés fondamentales

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On cherche une application qui vérifie :

(D1) Le déterminant de la matrice identité est égal à 1.

(D2) Si la matrice $\tilde{A}$ est obtenue à partir de A par échange de deux lignes, alors $\det\tilde{A} = -\det A$.

(D3) Le déterminant est une fonction linéaire de chacune des lignes de la matrice A :

   (a) si $\tilde{A}$ est obtenue à partir de A en multipliant tous les coefficients d'une ligne par $t \in \mathbb{R}$, alors $\det(\tilde{A}) = t\det(A)$.

   (b) si $A = \begin{bmatrix} \ell_1(A) \\ \vdots \\ \ell_k(A) \\ \vdots \\ \ell_n(A) \end{bmatrix}$ et $\tilde{A} = \begin{bmatrix} \ell_1(A) \\ \vdots \\ \tilde{\ell}_k(A) \\ \vdots \\ \ell_n(A) \end{bmatrix}$ sont deux matrices dont toutes les lignes sont identiques sauf une, alors $\det(A + \tilde{A}) = \det(A) + \det(\tilde{A})$.

On peut facilement vérifier que ces trois propriétés sont vérifiées par le déterminant des matrices 2×2, voir exercice 145. Nous admettrons pour l'instant le résultat suivant

Théorème 6.1 (Existence et unicité) *Il existe une unique application de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ qui vérifie (D1), (D2) , (D3).*

Nous démontrerons plus loin que l'on peut construire une application qui vérifie ces propriétés.
On note souvent pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

6.1.2 Les autres propriétés principales

De ces trois premières propriétés, on en déduit les six suivantes :

(D4) Si A a deux lignes identiques, $\det A = 0$.

Démonstration : Si une matrice A a deux lignes ℓ_{i_0} et ℓ_{j_0} identiques, alors la matrice A' obtenue en échangeant ces deux lignes est égale à la matrice A. Mais d'après la proposition précédente, on a $\det(A) = -\det(A') = -\det(A)$. On en déduit que $\det(A) = 0$. ∎

(D5) Le déterminant de A ne change pas si on ajoute à une ligne de A le produit par λ d'une autre ligne de A.

On en dd́uit que si U est une matrice triangulaire obtenue à partir de A par élimination de Gauss sans permutation, alors $\det(A) = \det(U)$.

Démonstration : On suppose que $n \geq 2$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose qu'il existe i_0 et j_0 tel que $i_0 \neq j_0$

$$\ell_i = \ell'_i, \forall i \neq i_0 \text{ et } \ell'_{i_0} = \ell_{i_0} + \lambda \ell_{j_0},$$

on veut montrer que

$$\det(A) = \det(A').$$

On considère A'' la matrice telle que pour tout $i \neq i_0$, $\ell''_i = \ell_i$ et $\ell''_{i_0} = \ell_{j_0}$. D'après le corollaire précédent, on a $\det(A'') = 0$. On multiplie maintenant cette ligne ℓ''_{i_0} par λ, la matrice obtenue $A^{(3)}$ est toujours de déterminant nul par la propriété (D3a). On utilise maintenant la propriété (D3b) pour les matrices A, A' et $A^{(3)}$ et on obtient que $\det(A) = \det(A') + \det(A^{(3)}) = \det(A')$. ∎

(D6) Si la matrice A a une ligne nulle, alors $\det A = 0$. **Démonstration :** Ceci découle de la propriété (D3a) en prenant $t = 0$. ∎

(D7) Si U est une matrice triangulaire, alors $\det U = \prod_{i=1}^{n} d_i$, où les d_i sont les termes diagonaux.

Démonstration : à faire… ∎

(D8) $\det(A) = 0$ ssi la matrice A est inversible (régulière).

$\det(A) \neq 0$ ssi la matrice A est non inversible (singulière).

Démonstration : à faire… ∎

(D9) Si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n, alors $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. En particulier, si A est inversible, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Démonstration : à faire… ∎

(D10) $\det(A) = \det(A^t)$.

Démonstration : à faire… ∎

6.1.3 Construction du déterminant dans le cas 2×2

Voyons sur une matrice 2×2 si l'on peut trouver une formule explicite pour une application satisfaisant (D1)-(D2)-(D3). Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. On suppose qu'on ne connaît pas la formule du déterminant d'une matrice 2×2 et on cherche à la retrouver par les propriétés (D1)-(D2)-(D3).

Par (D1) on a $\det \mathrm{I}d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, et par (D2) on a $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$.

Par (D3b), en décomposant $\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \end{bmatrix}$, on a

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

En faisant la même chose pour la deuxième ligne, on a :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{vmatrix}.$$

Par les propriété (D10) et (D6), $\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$. Par les propriétés (D3a) et (D1), $\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} = ad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = ad.$
On obtient donc finalement :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Notons qu'on n'a eu aucun choix lors de cette construction, qui est donc unique.

6.1.4 Exercices

Exercice 145 (Propriétés fondamentales du déterminant)

1. *Montrer que les propriétés (D1) (D2) (D3) sont bien vérifiées par le déterminant des matrices* 2×2 *.*
2. *Soit* δ *l'application de* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par* $\delta(A) = ad + bc$ *si* $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$*. Montrer que* δ *vérifie les proprétés (D1) et (D3) mais pas (D2).*

Exercice 146 (Modifications sur des matrices)
1. Soit A *une matrice réelle* 4×4 *telle que* $\det A = \frac{1}{2}$*. Calculer* $\det(2A)$, $\det(-A)$, $\det(A^2)$, $\det(A^{-1})$.
2. Même question si A *est une matrice réelle* 3×3 *telle que* $\det A = -1$.
3. Soit $A = (a_{i,j})_{i,j=1,2,3}$ *une matrice réelle* 3×3*. On note* $a_{i,j}$ *les coefficients de* A*, et* $\ell_1(A), \ell_2(A), \ell_3(A)$ *les trois lignes de* A*. On note* K L *et* M *les matrices définies à partir de* A *:*

1. $K = (k_{i,j})_{i,j=1,2,3}$ *avec* $k_{i,j} = (-1)^{i+j} a_{i,j}$.
2. $L = \begin{bmatrix} \ell_1(A) - \ell_3(A) \\ \ell_2(A) - \ell_1(A) \\ \ell_3(A) - \ell_2(A) \end{bmatrix}$
3. $M = \begin{bmatrix} \ell_1(A) + \ell_3(A) \\ \ell_2(A) + \ell_1(A) \\ \ell_3(A) + \ell_2(A) \end{bmatrix}$

Expliquer pourquoi $\det(K) = \det(A)$, $\det(L) = 0$, $\det(M) = 2\det(A)$.

Exercice 147 (Opérations sur les lignes) *Expliquer comment trouver que* $\begin{vmatrix} 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 \\ 1 & 1 & 1-a \end{vmatrix} = a^2(3-a)$ *en effectuant des opérations sur les lignes et les colonnes.*

6.2 Définition par des formules

6.2.1 Formule des pivots

On a vu dans les propriétés ci-dessus que le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses termes diagonaux. Une manière naturelle de calculer le déterminant d'une matrice carrée A d'ordre n est d'effectuer la factorisation LU de A (ou l'algorithme de Gauss). On a donc $PA = LU$, où P est une matrice de permutation, L une matrice triangulaire inférieure dont tous les termes diagonaux sont égaux à 1 et U est une matrice triangulaire inférieure. On a donc par la propriété (D9) que $\det(P)\det(A) = \det(L)\det(U)$. Comme P est une matrice de permutation, par la propriété (D2), on a $\det(P) = \pm 1$ selon le nombre d'échanges de lignes par rapport à la matrice Id. Par la propriété (D7), on a $\det(L) = 1$ et $\det U = \prod_{i=1}^{n} d_i$, où les d_i sont les termes diagonaux.
On en déduit que :

Proposition 6.2 (Déterminant par la formule du pivot) *Soit A une matrice inversible et* $\det A$ *défini par le théorème* **??**. *alors :*

1. *Si A est non inversible,* $\det A = 0$.
2. *Si A est inversible,* $\det A = \pm \prod_{i=1}^{n} d_i$ *où les d_i sont les pivots, et le signe est le déterminant de la matrice de permutation P telle que $PA = LU$.*

Cette proposition est très importante. En effet, c'est de cette manière qu'est implémenté le calcul de déterminant dans n'importe quel logiciel raisonnable. Les formules que nous allons voir par la suite, si elles ont bien sûr leur intérêt mathématique, ne permettent pas d'aboutir à des calculs pour des déterminants de "grosses" matrices en un temps raisonnable.

6.2.2 Formule des permutations

Dans la construction du déterminant 2×2, on a vu que sur les 4 déterminants qu'on a obtenus par la propriété de multilinéarité, deux d'entre eux sont nuls car ils ont des colonnes nulles. Soit maintenant $A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$.
On se convaincra assez facilement que dans le cas 3×3, sur les 27 déterminants qu'on aurait à calculer si on développait chaque ligne

$$\begin{bmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & a_{i,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{i,1} & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{i,2} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{i,3} \end{bmatrix},$$

on en a tout un tas qui sont nuls car ils ont des colonnes nulles. Plus précisément, il n'en existe que 6 qui sont non nuls, et qui correspondent d'ailleurs au nombre de permutations d'un ensemble Ã 3 éléments. Ceci est dû au fait que lorqu'on développe le déterminant, pour qu'un des déterminants développés soit non nul, il faut que chaque ligne et chaque colonne de la matrice A y soit représenté. On peut donc écrire :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{2,3} \\ 0 & a_{3,2} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{1,2} & 0 \\ a_{2,1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,3} \end{vmatrix}$$
$$+ \begin{vmatrix} 0 & a_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & a_{2,3} \\ a_{3,1} & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{1,3} \\ a_{2,1} & 0 & 0 \\ 0 & a_{3,2} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{1,3} \\ 0 & a_{2,2} & 0 \\ a_{3,1} & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (6.2.1)$$

Et donc

$$\det(A) = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}. \quad (6.2.2)$$

Pour une matrice $n \times n$, si on calcule tous les déterminants par décomposition de toutes les lignes, on en aurait n^2. Mais on ne veut considérer que ceux qui sont non nuls. A la première ligne on a n choix possibles de coefficients. Une fois le premier choisi, à la deuxième ligne on n'en a plus que $n - 1$, puisqu'on ne peut pas prendre de coefficient dans la même que le premier (sinon on se retrouvera avec une colonne nulle dans ce déterminant particulier, qui sera donc nul). De même, pour la troisième ligne, on n' amaintenant plus que $n - 2$ colonnes possibles... etc... On a donc $n!$ déterminants non nuls. La formule du déterminant par permutations est donnée par :

$$\det(A) = \sum_{\substack{(\alpha,\beta,\ldots,\omega) \\ \text{permutation de} \\ (1,2,\ldots,n)}} \varepsilon(\alpha, \beta, \ldots, \omega)\, a_{1,\alpha} a_{2,\beta} \ldots a_{\omega,n},$$

où $\varepsilon(\alpha, \beta, \ldots, \omega)$ est le signe de la permutation, c.à.d. 1 si la permutation est paire (nombre pair déchanges par rapport à l'identité) et -1 si la permutation est impaire (nombre impair déchanges par rapport à l'identité).

6.2.3 Formule des cofacteurs

Reprenons le calcul du déterminant 3×3 (formule (**??**)). Si on met les coefficients de la première ligne en facteur, on obtient :

$$\det(A) = a_{1,1}(a_{2,2}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,2}) + a_{1,2}(-a_{2,1}a_{3,3} + a_{2,3}a_{3,1}) + a_{1,3}(a_{2,1}a_{3,2} - a_{2,2}a_{3,1}) \quad (6.2.3)$$
$$= a_{1,1}\det(M_{1,1}) + +a_{1,2}(-\det(M_{1,2})) + a_{1,3}\det(M_{1,3}), \quad (6.2.4)$$

avec

$$M_{1,1} = \begin{bmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}, M_{1,2} = \begin{bmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{bmatrix} \text{ et } M_{1,3} = \begin{bmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{bmatrix}.$$

La matrice $M_{1,1}$ (resp. $M_{1,2}$,$M_{1,3}$) est donc une matrice 2×2 obtenue à partir de A en supprimant la ligne 1 et la colonne 1 (resp. 2, 3). On écrit encore cette formule :

$$\det(A) = a_{1,1}c_{1,1} + a_{1,2}c_{1,2} + a_{1,3}c_{1,3}, \tag{6.2.5}$$

où $c_{i,j}$ est appelé cofacteur de $a_{i,j}$ est égal à $(-1)^{i+j}\det(M_{i,j})$.

Si on reprend le cas des matrices 2×2 étudié au paragraphe précédent, on a la formule : $\det(A) = ad - bc = a(d) + b(-c)$. le terme d est le cofacteur de a et le terme $-c$ le cofacteur de b.
On va maintenant définir de manière plus génŕale le déterminant d'une matrice $n \times n$ par la formule des cofacteurs :

Proposition 6.3 (Formule des cofacteurs) *Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle* **déterminant** *de la matrice A un élément de $\mathbb{K}$, noté $\det(A)$ que l'on définit par récurrence de la façon suivante :*
- *Si $n = 1$ et $A = (a)$, alors $\det(A) = a$.*
- *Si $n \geq 2$, alors*

$$\det(A) = a_{1,1}c_{1,1} + a_{2,1}c_{2,1} + \cdots + a_{n,1}c_{n,1},$$

où $c_{i,j}$ est le cofacteur associé au coefficient $a_{i,j}$, défini par : $c_{i,j} = (-1)^{i+j}\Delta_{i,j} = (-1)^{i+j}\det(M_{i,j})$ et $M_{i,j} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ est la matrice obtenue à partir de la matrice A en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne.

Ce déterminant satisfait les propriétés (D1)-(D2)-(D3).

Démonstration : Montrons que cette construction du déterminant vérifie bien les propriétés (D1)-(D2)-(D3).

(D1) Pour $n = 1$ on a bien $\det(\mathrm{I}d) = 1$. On en déduit que $\det(\mathrm{I}d_n) = 1$ par récurrence sur n grâce à la formule des cofacteurs.

(D2) On montre le résultat par récurrence sur la dimension de la matrice. Soit $A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A' est obtenue à partir de A par un échange de lignes. Plus précisément, on note ℓ_i, ℓ'_i les lignes respectives de ces matrices, et on suppose qu'il existe i_0 et j_0 tel que $i_0 \neq j_0$

$$\ell_i = \ell'_i, \forall i \neq i_0, j_0 \text{ et } \ell_{i_0} = \ell'_{j_0}, \ell_{j_0} = \ell'_{i_0},$$

On veut montrer que $\det(A) = -\det(A')$. On note $c_{i,j}$ les cofacteurs de la matrice A et $c'_{i,j}$ les cofacteurs de la matrice A'. Par définition, on a :

$$\det(A') = a_{1,1}c'_{1,1} + a_{2,1}c'_{2,1} + \cdots + a_{j_0,1}c_{i_0,1} + \cdots + a_{i_0,1}c_{j_0,1} + \cdots + a_{n,1}c_{n,1}.$$

Par hypothèse de récurrence, pour tout $j \neq i_0, j_0$, on a $c'_{j,1} = -c_{j,1}$. Par ailleurs, $c'_{i_0,1} = (-1)^{i_0+1}\det(M'_{i_0,1})$ où $M'_{i_0,1}$ est la matrice extraite de A' lorsqu'on enlève la ligne i_0 et la colonne 1. Mais les lignes de A' sont égales à celles de A sauf les lignes i_0 et j_0 qui sont échangées. Donc $M'_{i_0,1}$ est aussi la matrice obtenue à partir de A lorsqu' on enlève la première colonne et la i_0 ème ligne et qu'on remplace la ligne ℓ_{j_0} par la ligne ℓ_{i_0}. Pour ramener cette ligne ℓ_{i_0} à sa position il faut alors faire $j_0 - i_0 + 1$ échanges de lignes. Par hypothèse de récurrence, on a donc $\det(M'_{i_0,1}) = (-1)^{j_0-i_0+1}\det(M_{j_0,1})$ De même on a $\det(M'_{j_0,1}) = (-1)^{i_0-j_0+1}\det(M_{i_0,1})$. On en déduit $c'_{i_0,1} = -c_{j_0,1}$ et $c'_{j_0,1} = -c_{i_0,1}$. On en déduit le résultat.

(D3a) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On veut montrer que i on multiplie par λ une ligne d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors son déterminant est multiplié par λ.

On montre le résultat par récurence sur la taille de la matrice. Pour $n = 2$ le résultat est immédiat. On suppose le résultat vrai pour toute matrice de taille $n - 1$. Soit A une matrice de taille n et $A^\lambda = D_i(\lambda)A$. On utilise la définition du déterminant pour calculer $\det(D_i(\lambda)A)$. On a

$$\begin{aligned}\det(D_i(\lambda)A) = a_{1,1}\Delta^\lambda_{1,1} - a_{2,1}\Delta^\lambda_{2,1} + \cdots + (-1)^i a_{i-1,1}\Delta^\lambda_{i-1,1} \\ + (-1)^{i+1}\lambda a_{i,1}\Delta^\lambda_{i,1} + (-1)^{i+2}a_{i+1,1}\Delta^\lambda_{i+1,1} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n,1}\Delta^\lambda_{n,1}.\end{aligned}$$

Remarquons que $\Delta^\lambda_{i,1} = \Delta_{i,1}$ et que $\Delta^\lambda_{j,1} = \lambda\Delta_{j,1}$ si $j \neq i$ en utilisant l'hypothèse de réccurence. On en déduit que

$$\det(D_i(\lambda)A) = \lambda\det(A).$$

(D3b) On considère trois matrices $A, A', A'' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\ell_i, \ell_i', \ell_i''$ les lignes respectives de ces matrices. On suppose qu'il existe i_0 tel que

$$\ell_i = \ell_i' = \ell_i'', \forall i \neq i_0 \text{ et } \ell_{i_0} = \ell_{i_0}' + \ell_{i_0}'',$$

on veut montrer que

$$\det(A) = \det(A') + \det(A'').$$

On raisonne là encore par récurence sur la taille de la matrice. Le résultat est vrai pour $n = 2$. On a

$$\det(A) = a_{1,1}\Delta_{1,1}^A - a_{2,1}\Delta_{2,1}^A + \cdots + (-1)^{i_0+1}a_{i_0,1}\Delta_{i_0,1}^A + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n,1}\Delta_{n,1}^A$$

Or $a_{i_0,1} = a_{i_0,1}' + a_{i_0,1}''$, $\Delta_{i_0,1}^A = \Delta_{i_0,1}^{A'} = \Delta_{i_0,1}^{A''}$. De plus si $i \neq i_0$, en utilisant la récurrence on a

$$\Delta_{i,1}^A = \Delta_{i,1}^{A'} + \Delta_{i,1}^{A''}.$$

On en déduit immédiatement que

$$\det(A) = \det(A') + \det(A'').$$

■

Démontrons maintenant quelques autres des propriétés directement par la formule des cofacteurs :

Proposition 6.4 (Propriété (D7)) *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice triangulaire supérieure ou inférieure, alors le déterminant de A est égal au produit des coefficients diagonaux de la matrice.*

Démonstration : On montre le résultat par récurrence sur la taille de la matrice. Lorsque $n = 2$ le résultat est immédiat. Supposons le résultat vrai pour toute matrice triangulaire de taille $n - 1$.
Si A est une matrice triangulaire supérieure de taille n. Comme $a_{i,1} = 0$ pour tout $i \geq 2$ on a $\det(A) = a_{1,1}\Delta_{1,1}$ avec $\Delta_{1,1}$ déterminant d'une matrice triangulaire supérieure de taille $n - 1$ dont les coefficients diagonaux sont les coefficients diagonaux de A, $a_{i,i}$ pour $i \geq 2$. D'où le résultat.
Si la matrice A est triangulaire inférieure, la matrice $A_{1,1}$ est une matrice triangulaire inférieure, l'hypothèse de récurrence assure que $\Delta_{1,1} = \prod_{i=2}^n a_{i,i}$. Si $i > 1$, alors la matrice $A_{i,1}$ a une ligne identiquement nulle, par suite son déterminant $\Delta_{i,1}$ est nul (proppriété (D6)). Le résultat suit immédiatement. ■

Corollaire 6.5 *Le déterminant de la matrice $D_i(a)$ est égal à a et si $i \neq j$, le déterminant de $T_{i,j}(\lambda)$ est égal à* 1.

Théorème 6.6 (Propriété (D9)) *Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Démonstration :
- **Première étape.** Notons que ce résultat est démontré si A est une matrice de dilatation (propriété (D3a)) ou si A est une matrice de transvection (propriété (D5)). Par conséquent le résultat est également démontré si A est un produit de matrices de dilatation ou de transvection.
- **Deuxième étape.** Notons que si A est une matrice inversible alors A est un produit de matrices élémentaires (Corollaire 3.30). Donc si A est inversible $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- **Troisième étape.** Supposons maintenant que la matrice A soit non inversible. Il existe une matrice E inversible telle que EA soit échelonnée, en particulier triangulaire supérieure. Or EA n'est pas inversible. Donc la dernière ligne de la matrice EA est une ligne de zéros. On déduit de la propriété (D6) que $\det(EA) = 0$ et d'après l'étape précédente, comme E est inversible, $\det(A) = \det(E^{-1}EA) = \det(E^{-1})\det(A) = 0$. Remarquons alors que la dernière ligne de la matrice EAB est nulle de sorte que (propriété (D6)) $\det(EAB) = 0$. A nouveau comme E est inversible on sait que $\det(E^{-1}EAB) = \det(E^{-1})\det(EAB)$, on en déduit que $\det(AB) = 0$ et donc que l'on a bien $\det(AB) = \det(A)\det(B) = 0$.

■

Théorème 6.7 *Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible alors*

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Démonstration : On utilise le résultat précédent. On a

$$\det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}) = \det(\mathrm{I}d) = 1.$$

Par suite

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

■

Théorème 6.8 (Propriété (D10), déterminant de la transposée) *Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors* $\det(A^t) = \det(A)$.

Démonstration : On remarque que le résultat est vrai pour les matrices élémentaires et pour les matrices triangulaires. Pour une matrice A quelconque on utilise une forme échelonnée $A' = EA$. On a $\det(A') = \det((A')^t)$ car A' est triangulaire supérieure et $\det(E^{-1}) = \det((E^{-1})^t)$ car E est un produit de matrices élémentaires. On en déduit que

$$\det(A^t) = \det((A')^t(E^{-1})^t) = \det((A')^t)\det((E^{-1})^t) = \det(A')\det(E^{-1}) = \det(E^{-1}A') = \det(A).$$

■

Corollaire 6.9 *Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a pour tout $j = 1, \ldots, n$*

$$\det(A) = (-1)^{j+1}\left(a_{1,j}\Delta_{1,j} - a_{2,j}\Delta_{2,j} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n,j}\Delta_{n,j}\right). \tag{6.2.6}$$

et pour tout $i = 1, \ldots, n$

$$\det(A) = (-1)^{i+1}\left(a_{i,1}\Delta_{i,1} - a_{i,2}\Delta_{i,2} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{i,n}\Delta_{i,n}\right). \tag{6.2.7}$$

Autrement dit, on peut développer le déterminant par rapport à n'importe quelle ligne ou colonne.

Démonstration : L'équation 6.2.1 découle de la propriété (D2), tandis que l'équation 6.2.2 est une conséquence de la propriété (D10). ■

Remarque 6.10 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le déterminant $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$ est appelé* **cofacteur** *de $a_{i,j}$. La* **comatrice de** *A, notée $\mathrm{C}o\,(A)$ est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont le coefficient i, j est le cofacteur $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$.*
On a en fait pour tout $i = 1, \ldots, n$

$$\det(A) = (-1)^{i+1}\Delta_{i,1}\,a_{i,1} + (-1)^{i+2}\Delta_{i,2}\,a_{i,2} + \cdots + (-1)^{i+n}\Delta_{i,n}\,a_{i,n},$$

et pour tout $j = 1, \ldots, n$

$$\det(A) = (-1)^{j+1}\Delta_{1,j}\,a_{1,j} + (-1)^{j+2}\Delta_{2,j}\,a_{2,j} + \cdots + (-1)^{j+n}\Delta_{n,j}\,a_{n,j}.$$

6.3 Applications du déterminant

6.3.1 Inversibilité

Proposition 6.11 *Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors on a*

$$(\mathrm{C}o\,(A))^t A = A(\mathrm{C}o\,(A))^t = \det(A)\mathrm{I}d_n.$$

Autrement dit, la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$ et alors on a

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(\mathrm{C}o\,(A))^t.$$

Démonstration : On a

$$((\mathrm{C}o\,(A))^t A)_{i,j} = (-1)^{i+1}\Delta_{1,i}\,a_{1,j} + (-1)^{i+2}\Delta_{2,i}\,a_{2,j} + \cdots + (-1)^{i+n}\Delta_{n,i}\,a_{n,j}$$

En utilisant la formule (6.2.1), on déduit que $((\mathrm{Co}\,(A))^t A)_{i,i} = \det(A)$. De plus si $i \neq j$, on reconnaît dans $((\mathrm{Co}\,(A))^t A)_{i,j}$ le déterminant de la matrice obtenue en remplaçant dans A $a_{1,i}, \ldots, a_{n,i}$ par $a_{1,j}, \ldots, a_{n,j}$, autrement dit la matrice obtenue à partir de A en remplaçant la colonne i par la colonne j. La matrice ainsi obtenue a deux colonnes identiques, son déterminant est donc nul. Par conséquent si $i \neq j$ $((\mathrm{Co}\,(A))^t A)_{i,j} = 0$. On a donc bien montré que $(\mathrm{Co}\,(A))^t A = A(\mathrm{Co}\,(A))^t = \det(A)\mathrm{Id}_n$.

■

Proposition 6.12 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension n. On se donne $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ une base de F. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors f est un isomorphisme de E sur F si et seulement si*

$$\det(\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)) \neq 0.$$

Démonstration : On a vu dans le Corollaire 5.16 que f est un isomorphisme si et seulement si la matrice $\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ est inversible. On utilise ensuite la Proposition 6.16. ■

6.3.2 Résolution de systèmes linéaires et formules de Cramer

Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible et $b \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. La solution $X = (x_i) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ du système linéaire $AX = b$ est donnée par $X = A^{-1}b$ ou encore

$$X = \frac{1}{\det(A)}(\mathrm{Co}\,(A))^t b,$$

ou composantes par composantes

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{1}{\det(A)}\left((-1)^{i+1}\Delta_{1,i}\, b_1 + (-1)^{i+2}\Delta_{2,i}\, b_2 + \cdots + (-1)^{i+n}\Delta_{n,i}\, b_n\right) \\ &= \frac{1}{\det(A)}\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

C'est ce que l'on appelle les **formules de Cramer**.

► On utilise ces formules pour $n = 2$ ou $n = 3$. Pour $n \geq 4$, il est plus rapide d'utiliser l'algorithme du pivot de Gauss.

6.3.3 Calculs d'aires et de volumes

A ECRIRE...

6.3.4 Le polynôme caratéristique d'une matrice : calcul des valeurs propres

Proposition 6.13 *On définit pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,*

$$P_A(X) = \det(A - X\mathrm{I}d_n).$$

C'est un polynôme de degré n appelé polynôme caractéristique.

Démonstration :
Il suffit de remarquer par réccurence que le déterminant d'une matrice de taille n est une somme de produits de n termes distincts de la matrice. Par conséquent c'est bien un polynôme en X. On montre alors par réccurence que son terme dominant est $(-1)^n X^n$. ■

On verra plus loin (next year) que les valeurs propres d'une matrice A sont les racines (dans $\mathbb{C}$) du polynôme caractéristique. Les valeurs propres et vecteurs propres sont des notions très importantes pour comprendre la structure d'une matrice et de l'application linéaire qui lui est associée.

6.3.5 Exercices

Exercice 148 *La famille* $(2,1,0)$, $(1,3,1)$, $(5,2,1)$ *est-elle libre ?*

Exercice 149 (Matrices inversibles) *Déterminer les valeurs du paramr̀e* $t \in \mathbb{R}$ *pour lesquelles matrices* $M_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \end{pmatrix}$ *et* $N_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *sont inversibles.*

Exercice 150 (Condition d'inversibilité) *Calculer* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$ *et déterminer la condition d'inversibilité de la matrice.*

Exercice 151 (Inverses de matrice par le déterminant) *En utilisant la comatrice, inverser les matrices* $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *ainsi que leurs produits.*

Exercice 152 *Soit* E *un espace vectoriel réel de dimension finie* n *et* $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ *telle que* $\varphi^2 = -id_E$.

1. *Donner des exemples de telles applications dans le cas* $n = 2$ *ou* 4.
2. *Montrer que de telles applications existent si et seulement si* n *est pair.*
   [On pourra utiliser le déterminant de ϕ*.]*

Exercice 153 (Applications du déterminant aux systèmes linéaires) *Combien de solutions a le système linéaire suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{rrrcr} 3x & +y & +z & = & 1 \\ 2x & -y & +z & = & 0 \\ -x & +y & -2z & = & 2 \end{array} \right.$$

Et ce système ?

$$\left\{ \begin{array}{rrrcr} 3x & +y & +z & = & 0 \\ 2x & -y & +z & = & 0 \\ -x & +y & -2z & = & 0 \end{array} \right.$$

Ou bien encore ce système ?

$$\left\{ \begin{array}{rrrcr} & +y & +z & = & 0 \\ 2x & & +4z & = & 0 \\ -x & +y & -z & = & 0 \end{array} \right.$$

Et celui-là ?

$$\left\{ \begin{array}{rrrcr} & +y & +z & = & 1 \\ 2x & & +4z & = & 1 \\ -x & +y & -z & = & -1 \end{array} \right.$$

Et pour finir ce système ?

$$\left\{ \begin{array}{rrrcr} & +y & +z & = & 2 \\ 2x & & +4z & = & 2 \\ -x & +y & -z & = & 1 \end{array} \right.$$

6.4 Quelques calculs de déterminants

6.4.1 Matrice de Froebenius

Proposition 6.14 (Déterminant d'une matrice de Frobenius) *Le polynôme*

$$P(X) = (-1)^{n+1}\left(X^{n+1} - a_n X^n - \cdots - a_1 - a_0\right)$$

est le polynôme caractéristique de la matrice de Frobenius de taille $n+1$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & & & \vdots & a_2 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & & 0 & 1 & 0 & a_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & a_n \end{bmatrix}$$

Démonstration : On doit calculer

$$\Delta = \begin{vmatrix} -X & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & -X & \ddots & & & \vdots & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & & 0 & 1 & -X & a_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & a_n - X \end{vmatrix}$$

Pour cela on va ajouter à la première ligne une combinaison linéaire des précédentes :

$$L_1 \to L_1 + XL_2 + X^2L_3 + \cdots + X^{n-1}L_{n-1} + X^nL_n$$

On obtient

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + (a_n - X)X^n \\ 1 & -X & \ddots & & & \vdots & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & & 0 & 1 & -X & a_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & a_n - X \end{vmatrix}$$

En développant le déterminant obtenu par rapport à la première ligne, on a

$$\Delta = (-1)^{n+2}(a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + (a_n - X)X^n) \begin{vmatrix} 1 & -X & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 & -X \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Par suite on a bien $\Delta = P(X)$. ∎

6.4.2 Déterminant de Van der Monde

On s'intéresse pour quatre réels distincts x_1, x_2, x_3, x_4 au déterminant suivant :

$$\Delta(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ (x_1)^2 & (x_2)^2 & (x_3)^2 & (x_4)^2 \\ (x_1)^3 & (x_2)^3 & (x_3)^3 & (x_4)^3 \end{vmatrix}$$

En developpant ce déterminant par rapport à la première colonne on remarque que $\Delta(x_1, x_2, x_3, x_4)$ est un polynôme de degré 3 en la variable x_1. De plus si $x_1 = x_2$ ou $x_1 = x_3$ ou $x_1 = x_4$, c'est le déterminant d'une matrice qui a deux colonnes identiques et par conséquent $\Delta(x_i, x_2, x_3, x_4) = 0$ pour $i = 2, 3, 4$. On en déduit que x_2, x_3, x_4 sont les racines de ce polynôme de degré 3 et qu'il existe une fonction $\delta(x_2, x_3, x_4)$ telle que

$$\Delta(x_1, x_2, x_3, x_4) = \delta(x_2, x_3, x_4)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4).$$

Si on développe par rapport à la première colonne ce déterminant on vérifie que

$$\delta(x_2, x_3, x_4) = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 & x_3 & x_4 \\ (x_2)^2 & (x_3)^2 & (x_4)^2. \end{vmatrix}$$

On recommence le même raisonnement

$$\delta(x_2, x_3, x_4) = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_3 & x_4 \end{vmatrix} (x_2 - x_3)(x_2 - x_4) = (x_3 - x_4)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4).$$

Autrement dit

$$\boxed{\Delta(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ (x_1)^2 & (x_2)^2 & (x_3)^2 & (x_4)^2 \\ (x_1)^3 & (x_2)^3 & (x_3)^3 & (x_4)^3 \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i \le 4 j > i} (x_i - x_j).}$$

Ce résultat se généralise par récurrence à la dimension n.

6.4.3 Déterminant d'une matrice tridiagonale

On s'intéresse au déterminant de la matrice tridiagonale suivante

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 \\ b & a & b & 0 & 0 \\ 0 & b & a & b & 0 \\ 0 & 0 & b & a & b \\ 0 & 0 & 0 & b & a \end{bmatrix}$$

On a en développant par rapport à la première colonne

$$\begin{aligned} \Delta^5_{a,b} = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 \\ b & a & b & 0 & 0 \\ 0 & b & a & b & 0 \\ 0 & 0 & b & a & b \\ 0 & 0 & 0 & b & a \end{vmatrix} &= a \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ b & a & b & 0 \\ 0 & b & a & b \\ 0 & 0 & b & a \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ b & a & b & 0 \\ 0 & b & a & b \\ 0 & 0 & b & a \end{vmatrix} \\ &= a \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ b & a & b & 0 \\ 0 & b & a & b \\ 0 & 0 & b & a \end{vmatrix} - b^2 \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & a \end{vmatrix} \\ &= a\Delta^4_{a,b} - b^2 \Delta^3_{a,b} \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}\Delta^4_{a,b} &= a\Delta^3_{a,b} - b^2\Delta^2_{a,b}\\ \Delta^3_{a,b} &= a\Delta^2_{a,b} - b^2\Delta^1_{a,b}\\ \Delta^2_{a,b} &= a^2 - b^2\\ \Delta^1_{a,b} &= a\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\Delta^3_{a,b} &= a(a^2-b^2) - b^2a = a^3 - 2b^2a\\ \Delta^4_{a,b} &= a(a^3-2b^2a) - b^2(a^2-b^2) = a^4 - 3b^2a^2 + b^4\\ \Delta^5_{a,b} &= a(a^4-3b^2a^2+b^4) - b^2(a^3-2b^2a) = a^5 - 4b^2a^3 + 3ab^4\end{aligned}$$

Le cas classique est $a = -2b$, on trouve alors

$$\begin{aligned}\Delta^3_{a,b} &= = -4b^3\\ \Delta^4_{a,b} &= a(a^3-2b^2a) - b^2(a^2-b^2) = 5b^4\\ \Delta^5_{a,b} &= a(a^4-3b^2a^2+b^4) - b^2(a^3-2b^2a) = -6b^5\end{aligned}$$

6.4.4 Exercices

Exercice 154 *Calculer de plusieurs façons le déterminant suivant*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 0 & 2\\ -1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2\end{vmatrix}$$

Exercice 155 *Sans calcul, montrer que* $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4\\ 5 & 2 & 7\\ 2 & 5 & 5\end{vmatrix}$ *est divisible par* 2 *et calculer le plus rapidement possible ce déterminant.*

Exercice 156 *Sans calcul, montrer que* $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 14\\ 5 & 5 & 7\\ 7 & 5 & 5\end{vmatrix}$ *est divisible par* 17.

Exercice 157 *Calculer les déterminants suivants* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4\\ 5 & 5 & 7 & 0\\ 0 & 7 & 5 & 5\\ 1 & 0 & 2 & 0\end{vmatrix}$ *et* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4\\ 2 & 4 & 2 & 8\\ 0 & 7 & 5 & 5\\ 1 & 0 & 2 & 0\end{vmatrix}$.

Exercice 158 *Calculer* $\begin{vmatrix} a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{vmatrix}$.

Exercice 159 *Calculer les déterminants des matrices suivantes :*

$$\begin{pmatrix} a & c & c & b\\ c & a & b & c\\ c & b & a & c\\ b & c & c & a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & a & b & c\\ a & c & c & b\\ b & c & c & a\\ c & b & a & c\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & x & y & z\\ b & x & y & z\\ c & x' & y' & z'\\ d & x' & y' & z'\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y & z & t\\ -y & x & -t & z\\ -z & t & x & -y\\ -t & -z & y & x\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1+a & b & a & b\\ b & 1+a & b & a\\ a & b & 1+a & b\\ b & a & b & 1+a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & a & a^2 & b+c+d\\ a & b & b^2 & c+d+a\\ a & c & c^2 & d+a+b\\ a & d & d^2 & a+b+c\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & a^2\\ 0 & 1 & b & b^2\\ 1 & 0 & c & c^2\\ 0 & 1 & d & d^2\end{pmatrix}$$

Exercice 160 (Déterminants de Vandermonde) *On note $a_1, \cdots, a_n$ des réels. Calculer les déterminants $n \times n$ suivants.*

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_3 & a_3 & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_n & a_n & a_n & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

Exercice 161 *Montrer que*

$$\begin{vmatrix} \cos a & \cos b & \cos c \\ \sin a & \sin b & \sin c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \sin(c-b) + \sin(b-a) + \sin(a-c) = 4 \sin \frac{c-b}{2} \sin \frac{b-a}{2} \sin \frac{a-c}{2}$$

Exercice 162 *Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \neq b$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on note B_n le déterminant suivant :*

$$B_n = \begin{vmatrix} a+b & a & & 0 \\ b & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ 0 & & b & a+b \end{vmatrix}$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4,\ B_n = (a+b)B_{n-1} - abB_{n-2}$ *Montrer que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2,\ B_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}.$$

Exercice 163 *Calculer le déterminant de la matrice tridiagonale suivante*

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Applications du déterminant

Appendices

Annexe A

Corrigés d'exercices

A.1 Chapitre 1

Exercice 13

$\boldsymbol{u} = A\boldsymbol{u}^*$, avec $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} \ell \\ s \\ c \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} \ell \\ s \\ c \end{bmatrix}$, et $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Exercice 20 (Plans et droites de $\mathbb{R}^3$)

(Corrigé par Maximilien Rigaut)
Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans d'équations respectives $x - y - z - 2 = 0$ et $x - 2y - 3z - 1$.
1) Un vecteur appartient au plan (vectoriel associé à) $\mathcal{P}$ à condition que ses composantes soient solution de l'équation du plan $x - y - z = 0$.
On a donc $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs du plan $\mathcal{P}$ non colinéaires, d'équation :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{De même on a } \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. Le vecteur $\vec{u} = \frac{1}{4}\vec{a} \wedge \vec{b}$ est normal au plan formé par les vecteur $\vec{a}$ et $\vec{b}$: $\mathcal{P}$ (car $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne sont pas colinéaires).

$$\vec{u} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le vecteur $\vec{v} = 2\vec{c} \wedge \vec{d}$ est normal au plan formé par ces derniers soit $\mathcal{P}'$:

$$\vec{v} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3. Comme $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, les plans sont sécants et se coupent en une droite $\mathcal{D}_1$. Soit $\vec{w} = (x, y, z)$ un vecteur directeur de la droite. Comme $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{P}$ on a $\vec{u}.\vec{w} = 0$ et comme $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{P}'$ on a $\vec{v}.\vec{w} = 0$.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -x + y + z & = & 0 \\ -x + 2y + 3z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -x + y + z & = & 0 \\ 2y - y + 3z - z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -z \\ y & = & -2z \end{array} \right.$$

On pose $z = t$ on a donc :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -t \\ y & = & -2t \\ z & = & t \end{array} \right.$$

Le vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$ a pour coefficients -1, -2 et 1 :

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On cherche l'équation de la droite $\mathcal{D}_1$ de vecteur directeur $\vec{w}$ et passant par le point $A = (5, 3, 0)$. La droite $\mathcal{D}_1$ a pour équation :

$$\begin{cases} x &= -t+5 \\ y &= -2t+3 \\ z &= t \end{cases}$$

4. Le plan orthogonal a la droite $\mathcal{D}_1$ et passant par $B = (1, 1, 1)$ a pour vecteur normal le vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$ soit $\vec{w}$. On a donc $\mathcal{P}''$ d'équation $-x - 2y + z + \rho = 0$, où la constante ρ est déterminée par le fait que le plan $\mathcal{P}''$ passe par par le point B. L'équation du plan $\mathcal{P}''$ est donc $-x - 2y + z + 2 = 0$.

A.2 Chapitre 2

Exercice 32 (Grosses matrices)

(Corrigé par Maximilien Rigaut)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 13 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 6 \\ -1 & -12 & -1 & 8 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 7 \\ -2 & 0 & 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 12 & 0 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 22 \\ 17 & -11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 12 & 0 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 7 \\ -2 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 13 & -18 \\ 12 & 12 & -36 & 84 \\ 2 & 2 & -6 & 14 \\ -7 & -1 & 15 & 2 \end{bmatrix}$$

Exercice 45

$$B_0 = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 10 & 1 & -7 \\ -2 & 3 & 11 \\ -2 & 3 & 3 \end{bmatrix},$$
$$B_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -7 \\ -2 & -5 & 11 \\ -2 & 3 & -5 \end{bmatrix}, B_2 A = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{8} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -7 \\ -2 & -5 & 11 \\ -2 & 3 & -5 \end{bmatrix}.$$

Exercice 40 (Matrice d'adjacence d'un graphe)

(avec la participation de Maximilien Rigaut)

$$\text{Soit } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Soient P_1, P_2 et P_3 les points d'un graphe dont la matrice d'adjacence est A. Alors par définition de la matrice :
- P_1 est relié à lui même et à P_2,
- P_2 est relié à P_1,

P_1 P_2 P_3

– P_3 est relié à P_1 et à P_3.

ce qui donne le graphe suivant :

Calculons A^2 :

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Démontrons que les coefficients de A^2 représentent le nombre de chemin à deux arêtes entre i et j.
En effet soit $C = A^2$, on a $C_{i,j} = \sum_{k=1}^{3} A_{i,k}A_{k,j}$. Or par définition de la matrice A, $A_{i,k}A_{k,j} = 1$ si et seulement si il existe une arête entre i et k et une arête entre k et j ; donc $A_{i,k}A_{k,j} = 1$ si et seulement si il existe un chemin à deux arêtes entre i et j. Sinon, $A_{i,k}A_{k,j} = 0$. Comme $C_{i,j} = \sum_{k=1}^{3} A_{i,k}A_{k,j}$, on en déduit que $C_{i,j}$ est exactement le nombre de chemin à deux arêtes entre i et k.

Calculons A^3 :

$$A^3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Par définition, $(A^3)_{i,j} = \sum_{k=1}^{3}(A^2)_{i,k}A_{k,j}$. Or $(A^2)_{i,k}$ est le nombre de chemin à deux arêtes entre i et k. Mais $A_{k,j} = 1$ si et seulement si il existe une arête entre k et j. Donc $(A^2)_{i,k}A_{k,j}$ est le nombre de chemins à trois arêtes entre i et j passant par k. On en déduit finalement que $(A^3)_{i,j} = \sum_{k=1}^{3}(A^2)_{i,k}A_{k,j}$ est le nombre total de chemins à trois arêtes entre i et j.

A.3 Chapitre 3

Exercice 73 (Somme de deux sous-espaces vectoriels)

1. D'abord, on a évidemment $\mathbf{0} \in F + G$. Montrons que $F + G$ est stable par combinaison linéaire. Si $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ $\in F + G$, alors on peut écrire $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_F + \boldsymbol{u}_G$ et $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_F + \boldsymbol{v}_G$, avec $\boldsymbol{u}_F, \boldsymbol{v}_F \in F$ et $\boldsymbol{u}_G, \boldsymbol{v}_G \in G$. Soient α et $\beta \in \mathbb{R}$. On a $\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v} = \alpha(\boldsymbol{u}_F + \boldsymbol{u}_G) + \beta(\boldsymbol{v}_F + \boldsymbol{v}_G) = \alpha\boldsymbol{u}_F + \beta\boldsymbol{v}_F + \alpha\boldsymbol{u}_G + \beta\boldsymbol{v}_G$. Or $\alpha\boldsymbol{u}_F + \beta\boldsymbol{v}_F \in F$ et $\alpha\boldsymbol{u}_G + \beta\boldsymbol{v}_G \in G$. Donc OK.

2. Dans $E = \mathbb{R}^2$: on prend F la droite de vecteur directeur $\boldsymbol{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et G la droite de vecteur directeur $\boldsymbol{j} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le vecteur $\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ n'appartient pas à $F \cup G$.

Exercice 85 (Une ligne avec que des uns)

Si la première ligne est remplie de 1, comme la matrice est totalement échelonnée, il n'y a pas de pivot dans les autres lignes, qui sont donc toutes nulles. Le rang de la matrice, qui est égal au nombre de pivots, au nombre de lignes non nulles ou encore au nombre de colonnes pivotales) est donc égal à 1.

Exercice 71 (Image d'une matrice et solution du sysème linéaire)

Dire qu'il existe une solution au système $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, c'est équivalent à dire qu'il existe $\boldsymbol{x}$ tel que $\boldsymbol{b}$ s'écrive comme le produit de la matrice A avec le vecteur $\boldsymbol{x}$, et donc que $\boldsymbol{b}$ soit une combinaison linéaire des colonnes de A. Le plus simple pour obtenir cela pour $\boldsymbol{b}_1$ et $\boldsymbol{b}_2$ est de prendre les colonnes de A égales à $\boldsymbol{b}_1$ et $\boldsymbol{b}_2$.

On veut de plus que le système $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_3$ n'admette pas de solution. Pour cela, il faut que $\boldsymbol{b}_3$ ne soit pas dans l'espace $C(A)$ (ou $\mathrm{Im}(A)$) des combinaisons linéaires des colonnes de A.

Donc si $\boldsymbol{b}_3$ est une combinaison linéaire de $\boldsymbol{b}_1$ et $\boldsymbol{b}_2$, il n'est pas possible de trouver A telle que les systèmes linéaires $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1$ et $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_2$ admettent une solution, et le système $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_3$ n'en admette pas.

Si $\boldsymbol{b}_3$ n'est pas une combinaison linéaire de $\boldsymbol{b}_1$ et $\boldsymbol{b}_2$, alors la matrice $n \times 2$ dont la première colonne est égale à $\boldsymbol{b}_1$ et la seconde à $\boldsymbol{b}_2$ convient.

Exercice 64 (Construction de sous-espaces)

1. Exemple 1 : La matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ convient.
2. Exemple 2 : $\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2$ et donc il n'existe pas de matrice A telle que les systèmes linéaires $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1$ et $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_2$ admettent une solution, et le système $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_3$ n'en admette pas.

1. F : ensemble des combinaisons lin ?aires des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

   G : ensemble des multiples du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
2. F : ensemble des matrices diagonales
   G : ensemble des matrices multiples de l'identit ?.
3. F : ensemble des fonctions y de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont la d ?riv ?e seconde est nulle
   G : ensemble des fonctions constantes.

Exercice 101 (Bases et dimension de sous-espaces de matrices)

1. Toute matrice carrée 2×2 s'écrit de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   La famille est donc génératrice. Il est facile de voir qu'elle est libre : c'est donc une base (en fait, c'est la base canonique sur l'ev des matrices carrées d'ordre 2, qu'on a vue en cours). Il y a 4 “vecteurs” (qui sont en fait des matrices) de base, donc l'espace est de dimension 4.
2. Une base de l'ev des matrices carrées $n \times n$ est la base canonique $(E_{ij})_{i=1,\ldots,n, j=1,\ldots,n}$ dont les coefficients sont tous égaux à 0, sauf celui de la i- ème ligne et j-ème colonne, qui est égal à 1. Or card ($(E_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}}$) = $n \times n$. Il y a donc n^2 vecteurs de base, et donc la dimension de l'espace des matrices carrées $n \times n$ est n^2.
3. Commençons par le cas 2×2 : si la matrice est diagonale, elle s'écrit :

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   La famille consituée des matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est libre, et c'est donc une base de l'espace des matrices diagonales. On en déduit que le sous-espace des matrices diagonales est de dimension 2.
   Une matrice diagonale de dimension n s'écrit comme combinaisons linéaires des n matrices E_{ii} définies ï¿$\frac{1}{2}$ la premiï¿$\frac{1}{2}$re question. Ces matrices sont libres, forment un base de l'espace des matrices diagonales, qui est donc de dimension n.
4. Commençons par le cas 2×2 : si la matrice est symétrique, elle s'écrit :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   La famille consituée des matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est libre (vérifiez le), et c'est donc une base de l'espace des matrices symétriques. On en déduit que le sous-espace des matrices diagonales est

de dimension 3.
Une matrice symétrique de dimension n s'écrit comme combinaisons linéaires des n matrices E_{ii}, $i = 1, \ldots, n$ et des matrices $E_{ij} + E_{ij}$, $j > i$, où les E_{ij} sont définies à la première question. Or le nombre des matrices $E_{ij} + E_{ij}$, $j > i$ est le cardinal de l'ensemble des couples (i, j) vérifiant $j > i$. Comptons les : pour $i = 1$, il y en a : $n - 1$. Pour $i = 2$, il y en a $n - 2$. Pour $i = k$, il y en a $n - k$ (dessinez les matrices pour $n = 3$ si vous ne comprenez pas...) Donc en tout, il y en a $n - 1 + n - 2 + \ldots + n - (n - 1)$, soit encore $\sum_{i=1}^{n-1}(n - i) = n(n - 1) - \sum_{i=1}^{n-1} i = n(n - 1) - \frac{n(n-1}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. Si on ajoute les n matrices diagonales, on a donc $n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$
Ces matrices sont libres, forment un base de l'espace des matrices diagonales, qui est donc de dimension n.

Exercice 102 (Espace de fonctions)

1. Ici, vous pouvez avoir un petit doute sur l'indṕendance de la famille à cause de la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. En effet, on a $4h(x) = 2f(x) - g(x)$ pour tout x, et donc $2f - g + 4h = 0$, ce qui montre que la famille est liée.
2. Là, il n'y a pas de relation simple entre les fonctions, on va donc essayer de montrer que c'est une famille libre : on suppose $\alpha f(x) + \beta g(x) + \gamma h(x) = 0$, c.à.d. $\alpha + \beta \sin(x) + \gamma \sin(2x)$ pour tout x. En prenant $x = 0$ on obtient $\alpha = 0$. En prenant $x = \frac{\pi}{2}$ on obtient $\beta = 0$ et en prenant $x = \frac{\pi}{4}$ on obtient $\gamma = 0$. On a donc bien une famille libre.
3. Même chose que précédemment ; on suppose $\alpha f + \beta g = 0$, c.à.d. $\alpha x + \beta \cos x = 0$ pour tout x. En prenant $x = 0$ on obtient $\beta = 0$. En prenant $x = \frac{\pi}{2}$ on trouve $\alpha = 0$.
4. On remarque que $3f(x) = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x^2 + 2x) + 3 = 3g(x) + h(x)$ pour tout x. Ceci montre que la famille $\{f, g, h\}$ est liée et donc *a fortiori* la famille $\{f, g, h, k\}$.
5. $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ pour tout x, donc la famille est liée.
6. La famille est liée car elle contient le vecteur nul (et donc on peut mettre n'importe quel coefficient non nul devant celui-ci et obtenir une combinaison linéaire nulle).

Corrigé de l'exercice 103

1. On remarque d'abord que $\mathbf{0} \in F$ et $\mathbf{0} \in G$; on a donc $\mathbf{0} \in F \cap G$. Il reste à montrer que $F \cap G$ est stable par combinaison linéaire. Soient $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v} \in F \cap G$ et soient λ et $\mu \in \mathbb{R}$. Comme F et G sont des s.e.v, ils ont stables par combinaison linéaire, et donc $\lambda\boldsymbol{u} + \mu\boldsymbol{v} \in F$ et $\lambda\boldsymbol{u} + \mu\boldsymbol{v} \in G$, ce qui montre que $\lambda\boldsymbol{u} + \mu\boldsymbol{v} \in F \cap G$, qui est donc bien un s.e.v..

2. (a) On vérifie facilement que les familles $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$ et $\{\boldsymbol{w}, \boldsymbol{z}\}$ sont libres. Elles sont donc des bases des espaces qu'elles engendrent. Donc $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$ est une base de F et $\{\boldsymbol{w}, \boldsymbol{z}\}$ est une base de G.
   (b) Soit $\boldsymbol{x} \in F \cap G$, alors $\boldsymbol{x}$ est de la forme : $\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}$. et $\boldsymbol{x} = \alpha'\boldsymbol{w} + \beta'\boldsymbol{z}$.
   $$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha + \beta \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha' + \beta' \\ \beta' \end{pmatrix}$$
   On en déduit que les vecteurs $\boldsymbol{x}$ de $F \cap G$ sont de la forme :
   $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}$ et une base de $F \cap G$ est le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le sous-espace $F \cap G$ est donc de dimension 1.
3. (a) L'espace F est une droite (dimesion 1) dont une base est le vecteur $\boldsymbol{u}$, et l'espace G un plan (dimension 2) dont une base est la famille $\{\boldsymbol{w}, \boldsymbol{z}\}$.
   (b) On vérifie facilement que $F \cap G$ est réduit à $\{\mathbf{0}\}$, dont la base est $\emptyset$: *on ne peut pas avoir* $\mathbf{0}$ *dans la base*, et donc il n'y **aucun** élément dans la base. Le sev $\{\mathbf{0}\}$ est de dimension 0.

Annexe B

Algorithmes et programmes informatiques

B.1 Algorithmes de Gauss et LU

On donne dans ce paragraphe la version “programmable” de l’algorithme de Gauss et de la maéthode LU pour une matrice carrée d’ordre n.
On souhaite résoudre $Ax = b$, avec $A \in M_n(\mathbb{R})$ inversible et un ou plusieurs second membres $b \in \mathbb{R}^n$.

Méthode de Gauss sans pivot

1. (Factorisation et descente) Pour i allant de 1 à n, on effectue les calculs suivants :

   (a) On ne change pas la i-ème ligne
   $u_{i,j} = a_{i,j}$ pour $j = i, \ldots, n$,
   $y_i = b_i$

   (b) On change les lignes $i+1$ à n (et le second membre) en utilisant la ligne i. Pour j allant de $i+1$ à n :
   $l_{j,i} = \frac{a_{j,i}}{a_{i,i}}$ (si $a_{i,i} = 0$, prendre la méthode avec pivot partiel)
   pour k allant de $i+1$ à n, $a_{j,k} = a_{j,k} - l_{j,i}a_{i,k}$ (noter que $a_{j,i} = 0$)
   $b_j = b_j - l_{j,i}y_i$

2. (Remontée) On calcule x
   Pour i allant de n à 1,
   $x_i = \frac{1}{u_{i,i}}(y_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{i,j}x_j)$

Méthode LU sans pivot

La méthode LU se déduit de la méthode de Gauss en remarquant simplement que, ayant conservé la matrice L, on peut effectuer les calculs sur b après les calculs sur A. Ce qui donne :

1. (Factorisation) Pour i allant de 1 à n, on effectue les calculs suivants :

   (a) On ne change pas la i-ème ligne
   $u_{i,j} = a_{i,j}$ pour $j = i, \ldots, n$,

   (b) On change les lignes $i+1$ à n (et le second membre) en utilisant la ligne i. Pour j allant de $i+1$ à n :
   $l_{j,i} = \frac{a_{j,i}}{a_{i,i}}$ (si $a_{i,i} = 0$, prendre la méthode avec pivot partiel)
   pour k de $i+1$ à n, $a_{j,k} = a_{j,k} - l_{j,i}a_{i,k}$ (noter que $a_{j,i} = 0$)

2. (Descente) On calcule y (avec $Ly = b$)
   Pour i allant de 1 à n,
   $y_i = b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{i,k}y_k$ (on a implicitement $l_{i,i} = 1$)

3. (Remontée) On calcule x (avec $Ux = y$)
   Pour i allant de n à 1,
   $x_i = \frac{1}{u_{i,i}}(y_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{i,j}x_j)$

Méthode LU avec pivot partiel

La méthode LU avec pivot partiel consiste simplement à remarquer que l'ordre dans lequel les équations sont prises n'a aucune importance pour l'algorithme. Au départ de l'algorithme, on se donne la bijection t de $\{1,\ldots,n\}$ dans $\{1,\ldots,n\}$ définie par $t(i)=i$, et qui va étre modfiée au cours de l'algorithme pour tenir compte du choix du pivot. On écrit l'algorithme précédent avec les nouveaux indices de ligne $t(i)$, ce qui donne :

1. (Factorisation) Pour i allant de 1 à n, on effectue les calculs suivants :
   (a) Choix du pivot (et de $t(i)$) : on cherche $k\in\{i,\ldots,n\}$ t.q. $|a_{t(k),i}|=\max\{|a_{t(l),i}|,l\in\{i,\ldots,n\}\}$. On change alors t en prenant $t(i)=t(k)$ et $t(k)=t(i)$.
   On ne change pas la ligne $t(i)$
   $u_{t(i),j}=a_{t(i),j}$ pour $j=i,\ldots,n$,
   (b) On modifie les lignes $t(j)$ autres que les lignes $t(1),\ldots,t(n)$ (et le second membre), en utilisant la ligne $t(i)$. Donc pour $t(j)\in\{t(i+1),\ldots,t(n)\}$ (noter qu'on a uniquement besoin de connaétre l'ensemble , et pas l'ordre) :
   $l_{t(j),i}=\frac{a_{t(j),i}}{a_{t(i),i}}$
   pour k de $i+1$ à n, $a_{t(j),k}=a_{t(j),k}-l_{t(j),i}a_{t(i),k}$ (noter que $a_{t(j),i}=0$)
2. (Descente) On calcule y
   Pour i allant de 1 à n,
   $y_i=b_{t(i)}-\sum_{j=1}^{i-1}l_{t(j),k}y_k$
3. (Remontée) On calcule x
   Pour i allant de n à 1,
   $x_i=\frac{1}{u_{t(i),i}}(y_i-\sum_{j=i+1}^{n}u_{t(i),j}x_j)$

NB : On a change l'ordre dans lequel les équations sont considérées (le tableau t donne cet ordre). Donc, on a aussi changé l'ordre dans lequel interviennent les composantes du second membre. Par contre, on n'a pas touché à l'ordre dans lequel interviennent les composantes de x et y.

Il reste maintenant à signaler le “miracle" de cet algorithme... Il est inutile de connaitre complètement t pour faire cet algorithme. A l'étape i de l'item 1 (et d'ailleurs aussi à l'étape i de l'item 2), il suffit de connaître $t(j)$ pour j allant de 1 à i, les opérations de $1(b)$ se faisant alors sur toutes les autres lignes (dans un ordre quelconque). Il suffit donc de partir d'une bijection arbitraire de $\{1,\ldots,n\}$ dans $\{1,\ldots,n\}$ (par exemple l'identité) et de la modifier à chaque étape. Pour que l'algorithme aboutisse, il suffit que $a_{t(i),i}\neq 0$ (ce qui toujours possible car A est inversible). Pour minimiser des erreurs d'arrondis, on a intérêt à choisir $t(i)$ pour que $|a_{t(i),i}|$ soit le plus grand possible. Ceci suggère de faire le choix suivant de $t(i)$ à l'étape i de l'item $1(a)$ de l'algorithme (et c'est à cette étape que $t(i)$ doit être défini) :

on cherche $k\in\{i,\ldots,n\}$ t.q. $|a_{t(k),i}|=\max\{|a_{t(l),i}|,l\in\{i,\ldots,n\}\}$. On change alors t en prenant $t(i)=t(k)$ et $t(k)=t(i)$.

Remarque : L'introduction des matrices L et U et des vecteurs $\boldsymbol{y}$ et $\boldsymbol{x}$ n'est pas nécessaire (tout peut s'écrire avec la matrice A et le vecteur b, que l'on modifie au cours de l'algorithme). L'introduction de L, U, x et y peut toutefois aider à comprendre la méthode. Le principe retenu est que, dans les algorithmes (Gauss ou LU), on modifie la matrice A et le second membre b (en remplaçant le système à résoudre par un système équivalent) mais on ne modifie jamais L, U, y et x (qui sont définis au cours de l'algorithme).
Remarque L'algorithme se ramene donc à résoudre $LUx=b$, en faisant $L\boldsymbol{y}=b$ et $Ux=\boldsymbol{y}$. Quand on fait $L\boldsymbol{y}=b$ les equations sont dans l'ordre $t(1),\ldots,t(n)$ (les composantes de b sont donc aussi prises dans cet ordre), mais le vecteur $\boldsymbol{y}$ est bien $(y_1,\ldots,y_n)^t$ (t signifie ici “transposé" pour obtenir un vecteur colonne). Puis, on fait $Ux=\boldsymbol{y}$, les equations sont toujours dans l'ordre $t(1),\ldots,t(n)$ mais les vecteurs x et $\boldsymbol{y}$ sont $(x_1,\ldots,x_n)^t$ et $(y_1,\ldots,y_n)^t$.